Mesurer un temps de réaction

NIVEAU
Première STI2D ou STL.

ÉLÉMENTS DU PROGRAMME DE SPÉCIALITÉ PHYSIQUE-CHIMIE ET MATHÉMATIQUES (STI2D – STL)
Les professeurs de physique-chimie et de mathématiques s'attachent à travailler conjointement les notions qui se prêtent à un croisement fructueux, notamment […] l'approche statistique des incertitudes de mesure. […] Il est en effet essentiel d'organiser des passerelles pédagogiques afin que les apports de chacune de ces deux disciplines puissent enrichir la compréhension de concepts communs et l'assimilation de méthodes partagées.

ÉLÉMENTS DU PROGRAMME DE PHYSIQUE-CHIMIE (SPÉCIALITÉ STI2D ET STL)
Notions et contenus
– Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.
– Dispersion des mesures, incertitude-type sur une série de mesures.
Capacités exigibles
– Exploiter des séries de mesures indépendantes (histogramme, moyenne et écart type).
– Procéder à une évaluation par une approche statistique (type A) d'une incertitude-type.
– Exprimer un résultat de mesure avec le nombre de chiffres significatifs adaptés et l'incertitude-type associée.

ÉLÉMENTS DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES DE SECONDE GÉNÉRALE ET TECHNOLOGIQUE
Contenu
Indicateur de dispersion : écart type.
Capacités attendues
– Décrire verbalement les différences entre deux séries statistiques, en s'appuyant sur des indicateurs ou sur des représentations graphiques données.
– Pour des données réelles ou issues d'une simulation, lire et comprendre une fonction écrite en Python renvoyant la moyenne m, l'écart type s, et la proportion d'éléments appartenant à $[m - 2s, m + 2s]$.

ÉLÉMENTS DU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES (TRONC COMMUN DE PREMIÈRE TECHNOLOGIQUE)
Les éléments observés dans cette activité, dans le contexte des moyennes, sont à mettre en relation avec les simulations effectuées dans l'enseignement de tronc commun dans le cadre d'une loi de Bernoulli (contexte de l'étude d'une proportion).
Activités de simulation
– Sur des simulations, on constate que la série des fréquences observées des *1* dans N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli a un écart-type de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pour plusieurs valeurs de n on représente $\frac{1}{\sqrt{n}}$ en abscisse et, en ordonnée, l'écart-type s des fréquences observées des 1 dans N échantillons (plusieurs centaines) de taille n. On peut commenter ce résultat en observant que pour diviser la dispersion par k il faut multiplier la taille de l'échantillon par k^2.

– Sur des simulations de *N* échantillons (*N* de l'ordre de plusieurs centaines), on évalue le pourcentage d'échantillons dont la fréquence observée des *1* se situe à une distance *s*, *2s* ou *3s* de *p* où *s* désigne l'écart-type de la série des fréquences observées. Sans développer de théorie de décision ou de test, et en prenant appui sur des simulations et des représentations (histogramme, nuage de points), on fait percevoir, pour une observation donnée, la diversité des interprétations possibles de la distance à *p* (paramètre du modèle) de la fréquence des *1* : situation fréquente ou situation rare dans le cadre du modèle.

SUPPORT NUMERIQUE

Python avec les bibliothèques pandas, random, numpy et matplotlib.pyplot.

MODALITÉ POSSIBLE DE MISE EN ŒUVRE

Cette activité peut-être mise en œuvre dans le cadre du cours de mathématiques de la spécialité physique-chimie et mathématiques de première STI2D ou STL et encadrée par le professeur de mathématiques. Elle peut être prolongée en physique ou en chimie dans le cadre de travaux pratiques expérimentaux sollicitant particulièrement les capacités exigibles de la partie « mesure et incertitudes » du programme.
Avant l'exploitation statistique des données, réalisée en classe, on demande aux élèves de recueillir, hors la classe, 300 temps de réaction en exploitant un programme écrit en langage Python.

CONTEXTE

Le temps de réaction correspond à la durée séparant la présentation d'un stimulus et la réponse apportée à ce stimulus. Ce sont les astronomes qui, les premiers, se sont préoccupés quantitativement du temps de réaction. Friedrich Wilhelm Bessel (1748-1846), mathématicien et astronome allemand, étudia la différence existant entre deux astronomes aguerris notant l'instant d'un événement astronomique et constata qu'il fallait en tenir compte pour effectuer des mesures astronomiques précises.
Dans l'activité, l'apparition du stimulus et la mesure du temps de réaction sont gérés par un programme en langage Python permettant de s'affranchir de tout dispositif expérimental.

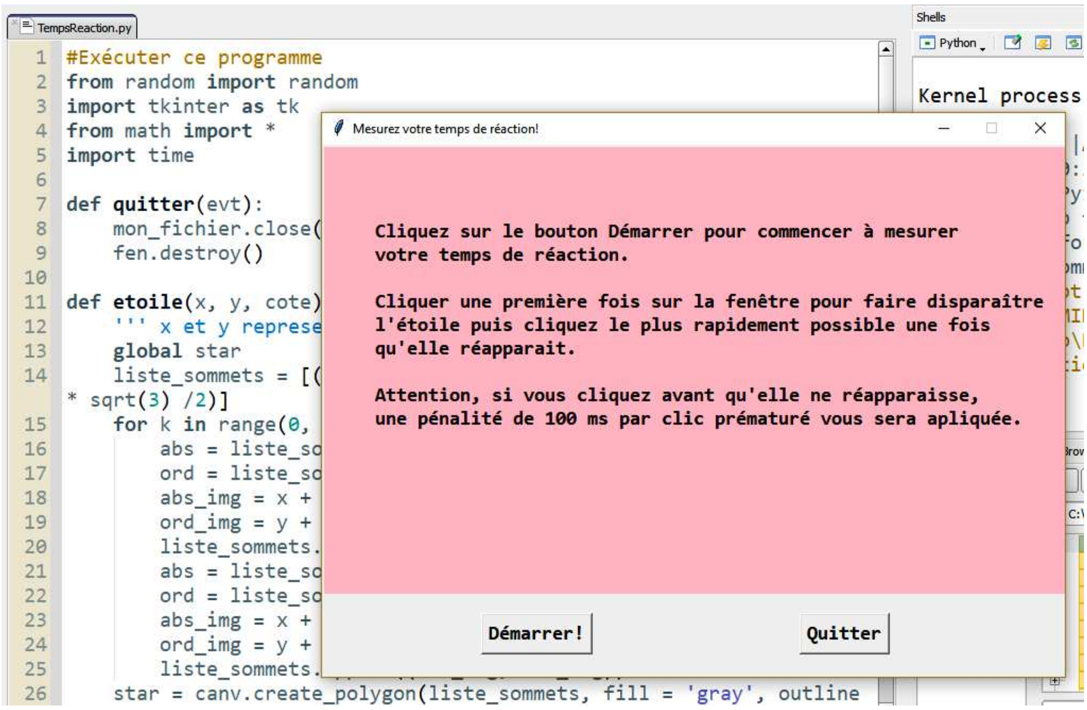
ÉNONCÉ DE L'ACTIVITÉ

Hors la classe : recueil de 300 temps de réaction

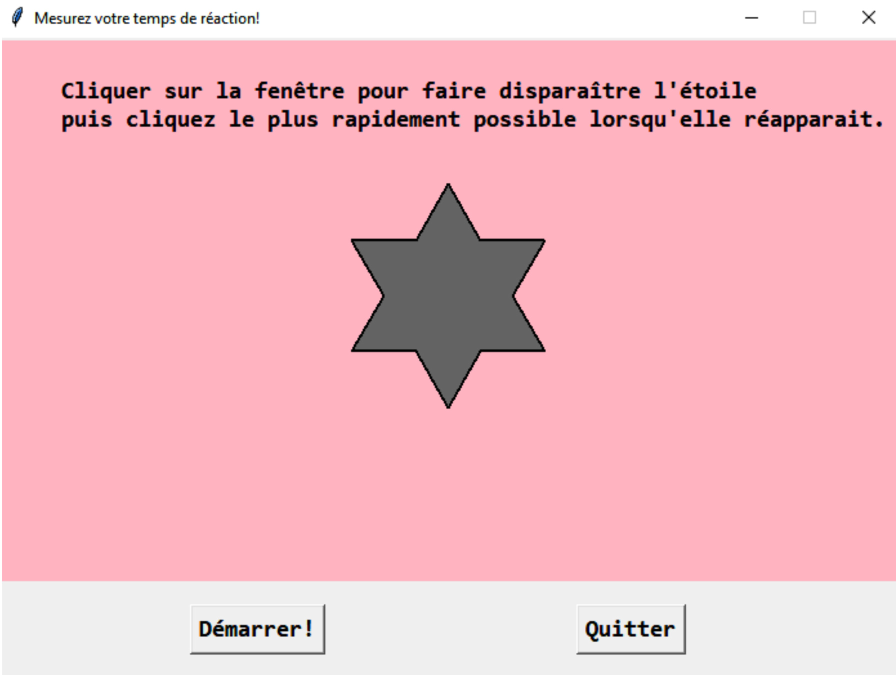
En exécutant le programme « TempsReaction.py », l'ouverture d'une fenêtre permet de mesurer vos temps de réaction qui seront enregistrés dans un fichier csv (dans le dossier où figure le programme Python).
Il faut cliquer sur le bouton « Démarrer ! » (une seule fois pour démarrer l'enregistrement). Puis un clic dans la fenêtre (zone rose) fait disparaître l'étoile pour une durée aléatoire. Il faut cliquer dès que l'étoile réapparaît.
Effectuez quelques essais pour prendre en main l'application puis démarrer l'enregistrement de 300 parties de ce petit jeu. Faire une pause après chaque paquet de 100 sans cliquer sur « Quitter » et effectuer un peu plus de 100 parties afin d'éliminer les éventuelles parties avec pénalité (le clic a eu lieu avant l'apparition de l'étoile).

Vos temps de réaction, mesurés en ms par l'ordinateur, sont enregistrés dans le fichier « MesTempsReaction.csv », qui peut s'ouvrir avec un tableur.

Exécution du programme « TempsReaction.py » :



Après avoir cliqué sur « Démarrer ! », le « jeu » commence. Cliquer sur la zone en rose et attendre que l'étoile réapparaisse. Cliquer à nouveau sur la zone en rose dès qu'elle réapparaît.



Partie A : analyse statistique des 300 temps de réaction

On modélise la situation en considérant la variable aléatoire T correspondant à votre temps de réaction en ms calculé par l'ordinateur en réponse à l'apparition de l'étoile (on suppose que ce temps de réaction est indépendant de la durée durant laquelle l'étoile a disparu). On souhaite estimer, à l'aide de mesures, votre temps de réaction moyen, c'est-à-dire l'espérance μ de la variable aléatoire T.

1. Implémenter en langage Python le programme suivant permettant la lecture et le stockage des mesures dans la variable M (le fichier « MesTempsReaction.csv » doit se trouver dans le même dossier que le fichier Python).

```
import random
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas
M = pandas.read_csv('MesTempsReaction.csv', sep = ';')
```

2. Exécuter l'instruction `M.head()` et commenter l'affichage.

3. Exécuter l'instruction `temps = list(M['temps'])` qui crée la liste `temps` formée des temps de réaction contenus dans la colonne correspondante du tableau de mesures.

4. Pour la série de vos 300 mesures, calculer le temps moyen, le temps minimal, le temps maximal et l'écart type s de vos temps de réaction.
(On peut utiliser les fonctions mean, min, max et std de la bibliothèque numpy, qui s'appliquent à des listes.)

5. Commenter l'affichage obtenu en saisissant les instructions suivantes :

```
plt.hist(temps, bins = 9)
plt.show()
```

6. En déduire une estimation de μ à l'aide de vos 300 mesures en indiquant l'incertitude-type correspondante.
(Cette question n'est à traiter que si la notion d'incertitude-type a été vue en physique-chimie.)

Partie B : étude de la distribution des moyennes obtenues sur des échantillons de taille 36

On comprend que plus on effectue de mesures, plus l'estimation de μ est précise. Il convient cependant de quantifier le gain en précision en fonction du nombre n de mesures réalisées. Pour cela, on étudie dans cette partie la variabilité de la moyenne obtenue sur un échantillon de 36 mesures. On considère que les 300 mesures constituent une bonne approximation de la loi de la variable aléatoire T et on prélève des échantillons aléatoires de taille 36 parmi ces mesures.

1. Exécuter les instructions suivantes.

```
L = random.choices(temps, k = 36)
L
```

À quoi correspond la liste `L` ?

2. Calculer la moyenne des valeurs de la liste `L`.

3. Exécuter l'instruction suivante.

```
moyennes36 = [np.mean(random.choices(temps, k = 36)) for i in range(500)]
```

À quoi correspond la liste `moyennes36` ?

4. Représenter, sous forme d'histogramme, les valeurs de la liste `moyennes36`. Comparer la forme de cet histogramme à celle de celui de la partie A.

5. Calculer l'écart type, noté s36, des valeurs de la liste `moyennes36`.

6. Exécuter les instructions suivantes permettant de superposer les histogrammes correspondant aux 300 mesures et aux 500 moyennes d'échantillons de taille 36. Pour faciliter la comparaison, on a normalisé les histogrammes (c'est-à-dire que l'aire globale de chacun est ramenée à une unité d'aire).

```
plt.hist(temps, bins = 9, density = True)
plt.hist(moyennes36, bins = 9, density = True, alpha = 0.5)
plt.show()
```

Commenter le graphique.

7. Calculer le rapport des écarts types s / s36.

Partie C : incertitude-type associée à une moyenne sur un échantillon de taille 36

On constate que passer de la distribution des mesures individuelles à celles des moyennes sur des échantillons de taille 36 conduit à diviser l'écart type par environ $\sqrt{36} = 6$.
Par ailleurs, la distribution des moyennes des échantillons de taille 36 est beaucoup plus symétrique que celle des mesures individuelles avec un histogramme en forme de cloche, distribution dite « normale » ou « gaussienne » pour laquelle environ 95 % des valeurs sont comprises dans un intervalle centré sur la moyenne et de rayon deux écarts types.

1. Compléter les instructions suivantes puis exécuter le programme pour obtenir la fréquence des valeurs de la liste `moyennes36` comprises dans l'intervalle [m – 2 s36, m + 2 s36] où m est la moyenne de la liste `moyennes36`.

```
m = np.mean(moyennes36)
k = 0
for valeur in moyennes36:
    if ……………………………………………:
        k = k + 1
k / 500
```

Qu'observe-t-on ?

2. En physique-chimie, on adopte le procédé suivant pour estimer µ à partir d'un échantillon de 36 temps de réaction. On calcule la moyenne expérimentale $\bar{t}_{exp}$ et l'écart type expérimental s_{exp} des 36 mesures (dans le cas de 36 mesures, l'écart type expérimental est proche de l'écart type des 36 mesures).

On estime que µ vaut $\bar{t}_{exp}$ avec une « incertitude-type » égale à $\frac{s_{exp}}{\sqrt{36}}$.

La « vraie » valeur de µ n'étant pas éloignée de la moyenne expérimentale de plus de deux incertitudes-types avec un niveau de confiance de 95 %.

a. Prélever un échantillon aléatoire de taille 36.
b. Calculer la moyenne et l'écart type de cet échantillon.
c. Donner une estimation de µ à partir de cet échantillon de taille 36 ainsi que l'incertitude type associée.

3. Revoir la réponse apportée à la question A.6.

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

A. 2. On obtient l'affichage suivant :

```
In [1]: import pandas
        import random
        import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt

In [2]: M = pandas.read_csv('MesTempsReaction.csv', sep = ';')

In [3]: M.head()
Out[3]:
```

	partie numero	temps	penalite
0	1	265	0
1	2	328	0
2	3	249	0
3	4	921	0
4	5	220	0

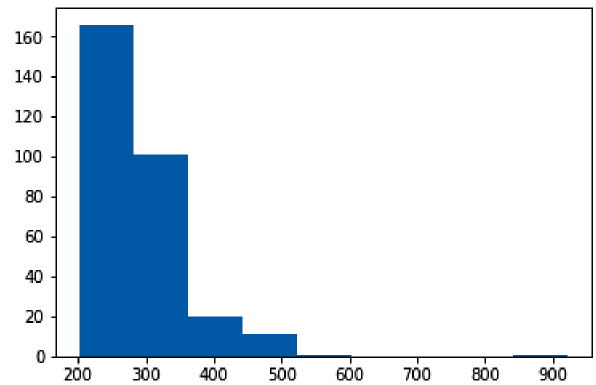
Il correspond aux cinq premières lignes de la table M.

4.

```
In [4]: temps = list(M['temps'])

In [5]: np.mean(temps)

Out[5]: 297.47333333333336

In [6]: s = np.std(temps)
        s

Out[6]: 69.80154694242496

In [7]: np.min(temps), np.max(temps)

Out[7]: (203, 921)
```

5.

```
In [8]: plt.hist(temps, bins = 9)
        plt.show()
```



On observe une distribution très asymétrique des temps de réaction.

6. On estime que μ vaut environ 297,5 ms avec une incertitude-type valant $\frac{69,80}{\sqrt{300}}$ c'est-à-dire environ 4 ms.

Remarques pour le professeur :

– Il est probable que nombre d'élèves oublient, à ce stade de l'activité, de diviser par $\sqrt{300}$. Il est préférable de les laisser poursuivre l'activité, et les simulations qui suivent, pour qu'ils puissent reconsidérer leur réponse en fin d'activité.

– L'écart type des 300 temps de réaction t_i obtenu selon la formule $\sqrt{\frac{1}{300}\sum\left(t_i-\bar{t}\right)^2}$ n'est pas la meilleure estimation de l'écart type des temps de réaction. Il y a un biais de sous-estimation de ce dernier écart type. On montre qu'une meilleure estimation est donnée par la formule $\sqrt{\frac{1}{299}\sum\left(t_i-\bar{t}\right)^2}$, nommée en métrologie « écart type expérimental ». Une « meilleure estimation » de l'incertitude type, telle qu'elle est pratiquée en physique-chimie, serait donc $\frac{69,80}{\sqrt{299}}$ c'est-à-dire environ 4,04 ms au lieu de 4,03 ms. Pour un nombre important de mesures (au moins 25 ou 30 mesures), l'écart type expérimental est très proche de l'écart type de l'échantillon.

Pour distinguer les différents indicateurs, on peut utiliser la représentation suivante, où l'on note par des lettres grecques les valeurs théoriques (valeurs sur la population) et par des lettres latines les quantités calculées avec l'échantillon.

μ espérance de T

σ écart type de T

$n = 300$

$\bar{t} = \frac{1}{300}\sum t_i$ moyenne des mesures

$s = \sqrt{\frac{1}{300}\sum\left(t_i-\bar{t}\right)^2}$ écart type des mesures

$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{299}\sum\left(t_i-\bar{t}\right)^2}$ estimation sans biais de σ

(« écart type expérimental »)

L'essentiel dans cette activité est de concentrer l'attention des lycéens sur deux éléments : l'écart type est divisé par la racine carrée de la taille de l'échantillon lorsqu'on considère une moyenne obtenue sur un échantillon de mesures et, pour une taille d'échantillon au moins égale à 25 ou 30, 95 % des échantillons fournissent une moyenne qui ne s'écarte pas de la valeur attendue de plus de deux écarts types (où l'écart type est obtenu en divisant l'écart type de l'échantillon, ou la valeur fournie par l'estimateur sans biais, par la racine carrée du nombre de mesures).

B. 1.

```
In [9]: L = random.choices(temps, k = 36)
        L

Out[9]: [328,
         296,
         249,
         281,
         265,
         374,
         265,
         359,
```

La liste L correspond à un échantillon aléatoire de 36 temps de réaction.

2.

```
In [10]: np.mean(L)

Out[10]: 307.5833333333333
```

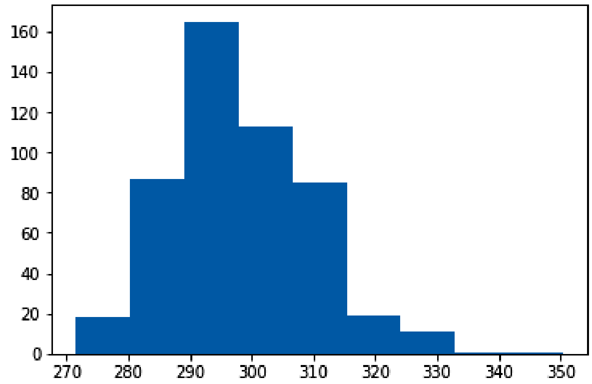
3.

```
In [11]: moyennes36 = [np.mean(random.choices(temps, k = 36)) for i in range(500)]
```

Cette liste correspond à 500 moyennes calculées sur des échantillons de taille 36.

4.

```
In [12]: plt.hist(moyennes36, bins = 9)
         plt.show()
```



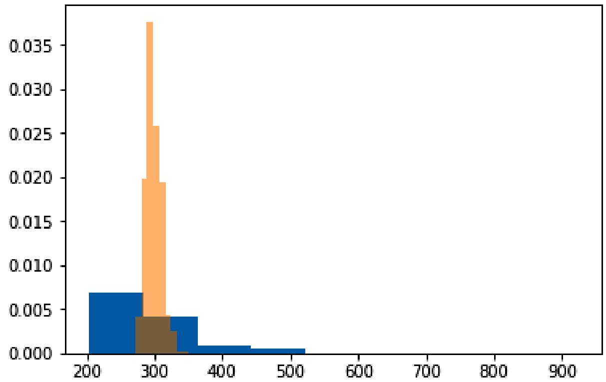
Cet histogramme est davantage symétrique que le précédent (de forme « gaussienne »).

5.

```
In [13]: s36 = np.std(moyennes36)
         s36

Out[13]: 11.416168544283211
```

6.

```
In [14]: plt.hist(temps, bins = 9, density = True)
         plt.hist(moyennes36, bins = 9, density = True, alpha = 0.5)
         plt.show()
```



La distribution des moyennes des échantillons de taille 36 est beaucoup moins dispersée que celle des mesures individuelles.

7.

```
In [15]: s / s36
Out[15]: 6.11427088446228
```

Le rapport des écarts types est environ égal à 6.

C. 1.

```
In [16]: m = np.mean(moyennes36)
         k = 0
         for valeur in moyennes36:
             if m - 2 * s36 <= valeur <= m + 2 * s36:
                 k = k + 1
         k / 500
Out[16]: 0.954
```

On observe qu'environ 95 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle centré sur la moyenne et de rayon deux écarts types.

Remarque pour le professeur :

Le théorème limite central affirme que, pour n grand, la variable aléatoire correspondant à la moyenne des mesures sur un échantillon aléatoire de taille n suit une loi normale. On considère que cette approximation est raisonnable à partir de $n = 25$ ou $n = 30$. Pour de petits échantillons (n inférieur à 25), on fait appel à la loi de Student.

2.

```
In [17]: E = random.choices(temps, k = 36)
         m_ech = np.mean(E)
         s_ech = np.std(E)

In [18]: m_ech

Out[18]: 296.25

In [19]: s_ech / 6

Out[19]: 13.15273377911214
```

À partir de cet échantillon de 36 mesures, on estime que µ vaut 296,3 ms avec une incertitude type de 13,2 ms.

Remarque pour le professeur :
Ce que l'on nomme « écart type expérimental » en métrologie (et en physique-chimie) est l'estimation sans biais obtenue à partir de l'échantillon et donnée par l'expression :

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(t_i-\bar{t}\right)^2}\ .$$

Cette notion n'est pas au programme de mathématiques en dehors de l'enseignement supérieur. L'utilisation de l'estimateur sans biais de l'écart type conduirait à une incertitude type d'environ 10,3 ms (on multiplie par $\sqrt{35}/\sqrt{36}$). L'ordre de grandeur est donc le même. En revanche, pour un petit nombre de mesures, ce que l'on n'envisage pas ici, l'utilisation de l'estimateur sans biais est préférable.