

## Thème : Les nombres premiers

### Activité 2. Algorithmes sur les nombres premiers (3 exercices)

#### Exercice 1 : Tester la primalité (identique à l'exercice 3 de l'activité 1 « Autour des nombres premiers »)

Prérequis : Diviseurs, nombres premiers.

Objectifs : Test de primalité et sa programmation. Amélioration d'un algorithme.

- 1) A l'aide de divisions successives, trouver les nombres premiers parmi : 107, 227, 375, 377, 379, 571.
- 2) Recommencer la question précédente en réduisant le nombre de tests. Expliquer votre démarche. Avez-vous l'impression de pouvoir être encore plus "économe" ? Comment peut-on minimiser le nombre de tests ?
- 3) On considère l'algorithme suivant :

Déclaration des variables :  $N$  et  $I$  sont des entiers

Début de l'algorithme

```
Saisir  $N$ 
Si  $N \leq 3$ 
Alors
    Si  $N = 2$  ou  $N = 3$ 
    Alors
        Afficher " $N$  PREMIER"
    Sinon
        Afficher " $N$  NON PREMIER"
    Fin Si
Sinon
     $I$  prend la valeur 2
    Tant que ( $I$  ne divise pas  $N$ ) et ( $I \leq E(\sqrt{N})$ )
         $I$  prend la valeur  $I + 1$ 
    Fin Tant que
    Si  $I$  divise  $N$ 
    Alors
        Afficher " $N$  NON PREMIER"
    Sinon
        Afficher " $N$  PREMIER"
    Fin Si
Fin Si
```

Fin de l'algorithme

#### Note :

La fonction  **$E$**  est la **fonction partie entière** :  
A tout réel  $x$  elle associe l'unique entier relatif  $E(x)$  qui lui est immédiatement inférieur ou égal.

Exemples :

$E(3) = 3$  ;  $E(3,14) = 3$  ;  $E(-2,718) = -3$ .

- Sur les calculatrices TI, il s'agit de la commande **partEnt** - ou **int** pour les calculatrices en anglais - (touche **math**, menu MATH)
- Sur les Casio, il s'agit de la commande **Intg** (touche **OPTN**, menu NUM).

Faire fonctionner sur le papier cet algorithme pour  $N = 19$ ,  $N = 21$  et  $N = 53$ . Qu'affiche-t-il ?

- 4) a) Programmer cet algorithme sur la calculatrice (Nommer ce programme TESTA).  
b) Vérifier que le programme fonctionne pour  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 3$ ,  $N = 19$ ,  $N = 21$  et  $N = 53$  puis l'utiliser pour dire parmi les nombres suivants lesquels sont premiers : 2 011 ; 2 013 ; 2 015 ; 2 017 et 2 019.  
c) Chronométrer le temps que met le programme TESTA pour tester la primalité de  $N = 7\,237\,031$ .
- 5) a) Modifier l'algorithme précédent pour tester la division par 2 et pour ensuite ne pas tester la division par tous les autres nombres pairs.  
b) Programmer cet algorithme sur la calculatrice (Nommer ce programme TESTB).  
c) Vérifier que le programme fonctionne correctement pour  $N = 19$ ,  $N = 21$ ,  $N = 53$  et pour  $N$  pair.  
d) Chronométrer le temps que met le programme TESTB pour tester la primalité de  $N = 7\,237\,031$ .

## Exercice 2 : Liste des nombres premiers inférieurs à 1000

Pré requis : Avoir le programme TESTB de test de la primalité de l'exercice 1.

Objectif : Créer un algorithme qui crée la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à 1009. Créer le programme LISTPREM sur la calculatrice.

### 1 Principe

- On utilise une nouvelle liste qui sera la Liste6 (cela laisse libres les Listes 1, 2, 3... souvent utilisées pour des calculs courants). On utilisera une version aménagée en sous-programme du programme TESTB pour tester si un entier naturel  $N$  est premier.

- On commence avec  $N = 2$ . Si  $N$  est premier

Alors on écrit  $N$  dans la liste Liste6 (à la ligne 1)

Comme 2 est premier on écrit donc 2 à la première ligne de la liste ce qui donne Liste6[1] = 2

- On incrémente<sup>1</sup>  $N$  de 1. On a alors  $N = 3$

Si  $N$  est premier

Alors on écrit  $N$  dans la liste Liste6 (à la ligne 2)

Comme 3 est premier on écrit donc 3 à la deuxième ligne de la liste  $LP$  ce qui donne Liste6[2] = 3

- On incrémente  $N$  de 1. On a alors  $N = 4$

Si  $N$  est premier

Comme 4 n'est pas premier on n'écrit donc rien dans la liste Liste6.

- On incrémente  $N$  de 1. On a alors  $N = 5$

Si  $N$  est premier

Alors on écrit  $N$  dans la liste Liste6 (à la ligne 3)

Comme 5 est premier on écrit donc 5 à la troisième ligne de la liste Liste6 qui donne Liste6[3] = 5

- On réitère cette démarche tant que  $N \leq 1009$

Après l'exécution du programme, on aura dans la liste Liste6 les premiers nombres premiers :

Liste6
2
3
5
7
11

---

<sup>1</sup> **Incrémenter** une variable, c'est lui ajouter une quantité constante

## 2 Modification du programme TESTB (renommé PREM)

On modifie le programme de test de primalité TESTB car on va en avoir besoin comme sous-programme dans le nouvel programme LISTPREM

Procédure sur calculatrice TI	Procédure sur calculatrice Casio
<ul style="list-style-type: none"> <li>Créer un nouveau programme PREM</li> <li>Y copier le programme TESTB. Pour cela : Le curseur étant sur la première ligne (juste après : ) 2<sup>nd</sup> <b>sto→</b></li> <li><b>Prgm</b> EXEC TESTB</li> <li><b>Entrée</b> <b>Entrée</b></li> <li>Enlever avec la touche <b>suppr</b> la première ligne Prompt N</li> <li>Dans le programme PREM, <ul style="list-style-type: none"> <li>Remplacer les trois lignes <b>Disp « N NON PREMIER »</b> par <b>0 → P</b> (touche <b>annul</b> pour effacer la ligne sans la supprimer)</li> <li>Remplacer les deux lignes <b>Disp « N PREMIER »</b> par <b>1 → P</b></li> <li>Ecrire sur la dernière ligne : <b>Return</b> (se trouve dans <b>prgm</b> CTL)</li> </ul> </li> </ul>	<p>Renommer le programme TESTB en PREM</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Enlever avec la touche <b>DEL</b> la première ligne “N=”?→N</li> <li>Dans le programme PREM, <ul style="list-style-type: none"> <li>Remplacer les trois lignes “<b>N NON PREMIER</b>” ▲ par <b>0 → P</b> (touche <b>annul</b> pour effacer la ligne sans la supprimer)</li> <li>Remplacer les deux lignes <b>Disp « N PREMIER »</b> par <b>1 → P</b></li> </ul> </li> <li>Ecrire sur la dernière ligne : <b>Return</b> (se trouve dans <b>prgm</b> CTL)</li> </ul>

Ainsi, le programme PREM reçoit un entier  $N \geq 1$  et renvoie la variable  $P$  qui vaut 1 lorsque  $N$  est premier et 0 lorsque  $N$  est composé.

PREM sur TI
<pre> If N ≤ 3 Then If N=2 ou N=3 Then 1→P Else 0→P End Else If partEnt(N/2)=N/2 Then 0→P Else 3→I While (partEnt(N/I)≠N/I) et (I≤ partEnt(v(N))) I+2→I End If partEnt(N/I)=N/I Then 0→P Else 1→P End End Return </pre>

PREM sur Casio
<pre> If N≤ 3 Then If N=2 Or N=3 Then 1→P Else 0→P IfEnd Else If Intg(N÷2)=N÷2 Then 0→P Else 3→I While (Intg(N÷I)≠N÷I) And (I≤ Intg(v(N))) I+2→I WhileEnd If Intg(N÷I)=N÷I Then 0→P Else 1→P IfEnd IfEnd Return </pre>

### 3 Algorithme LISTPREM

Effacer la liste Liste6

$N$  reçoit 2

$I$  reçoit 1

**Tant que**  $N \leq 1009$  **faire**

Appel du sous-programme PREM

**Si**  $P = 1$

**Alors** Liste6[ $I$ ] reçoit  $N$

$I$  reçoit  $I + 1$

**FinSi**

$N$  reçoit  $N + 1$

**FinTant que**

### 4 Programmation de la calculatrice

On traduit l'algorithme précédent en langage TI ou Casio.

#### 4.1 Ecriture du programme LISTPREM

Saisir le programme « LISTPREM » sur la calculatrice.

Calculatrice TI	Calculatrice Casio
<p>⚠ On choisit L6 dans 2<sup>nd</sup> listes NOMS</p> <p>⚠ prgmPREM s'écrit en tapant prgm EXEC</p> <p>PREM entrer</p>	

#### LISTPREM sur TI

EffListe L6

$2 \rightarrow N$

$1 \rightarrow J$

While  $N \leq 1009$

prgmPREM

If  $P=1$

Then

$N \rightarrow L6(J)$

$J+1 \rightarrow J$

End

$N+1 \rightarrow N$

End

#### LISTPREM sur Casio

ClrList 6

$2 \rightarrow N$

$1 \rightarrow J$

While  $N \leq 1009$

Prog "PREM"

If  $P=1$

Then

$N \rightarrow \text{List } 6[J]$

$J+1 \rightarrow J$

IfEnd

$N+1 \rightarrow N$

WhileEnd

ClrText

#### 4.2 Utilisation du programme LISTPREM

1. Exécutez-le en le chronométrant.
2. Vérifiez que vous avez obtenu dans la liste Liste6 les nombres premiers inférieurs ou égaux à 1009 en allant dans le menu Statistiques
3. On note  $\pi(P)$  le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $P$ . Utilisez la liste Liste6 des nombres premiers inférieurs ou égaux à 1009 pour compléter le tableau ci-dessous :

$P$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\pi(P)$										

Peut-on parler d'équi-répartition des nombres premiers ? Justifier votre réponse.

### Exercice 3 : Recherche des diviseurs premiers inférieurs ou égaux à 1000

Pré requis : Avoir la liste des nombres premiers inférieurs à 1000 de l'exercice 2.

Objectif : Obtenir un algorithme qui donne la liste des diviseurs premiers inférieurs à 1000 d'un entier naturel non nul quelconque.

## 1 Principe

- On donne un entier naturel non nul  $N$ .
- On cherche dans la liste des nombres premiers  $P$  inférieurs ou égaux à 1009 ceux qui divisent  $N$ .
- On commence par créer la liste dans la calculatrice des nombres premiers de 2 à 1009 à l'aide du programme LISTPREM (voir l'exercice 2).

## 2 Algorithme DIVISPRE

```
Saisir N
I reçoit 1
P reçoit 0
Tant que  $P < 997$  et  $P \leq N$  faire
    P reçoit l'élément I de la liste Liste6
    Si N est divisible par P
        Alors
            Afficher « Divisible par », P
        Fin Si
    I reçoit  $I + 1$ 
FinTant que
```

## 3 Programmation de la calculatrice

Travail préalable : Exécutez le programme LISTPREM et assurez-vous que la liste Liste6 contient tous les nombres premiers de 2 à 1009.

1. Ecrivez le programme « DIVISPRE » dans votre calculatrice.
2. Exécutez-le en cherchant les diviseurs premiers de  
 $N = 12$  ;  $N = 13$  ;  $N = 985$  ;  $N = 997$  ;  $N = 1000$  ;  $N = 1009$ .
3. Quels sont les nombres  $N$  dont le programme donnera tous les diviseurs premiers ? Testez sur un exemple.
4. Quels sont les nombres  $N$  dont le programme donnera certains diviseurs premiers mais pas tous ? Testez sur un exemple.
5. Quels sont les nombres  $N$  dont le programme ne donnera aucun diviseur premier ? Testez sur un exemple.