NOMBRES COMPLEXES 1

Dans cette brève étude, on insistera sur l'intervention des nombres complexes en analyse (résolution d'équations différentielles) et sur leur utilisation en électricité et en électronique.

a) Sommes $a + b\mathrm{i}$ telles que $\mathrm{i}^2 = -1$: égalité, somme, produit, conjugué, inverse. Représentation géométrique. Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto \mathscr{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathscr{Im}(z)$.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas au programme. Les étudiants doivent connaître la notation $x + \mathrm{j}y$, utilisée en électricité. Aucune connaissance sur les applications des nombres complexes à la géométrie n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
b) Module d'un nombre complexe ; argument d'un nombre complexe non nul. Notation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$; forme trigonométrique $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r > 0$. Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto \lvert z - a\rvert$ et $z \mapsto \mathrm{Arg}(z - a)$. Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement. Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$; lien avec les formules d'addition.	Le repérage polaire $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où ρ est de signe quelconque, est hors programme.
c) Formule de Moivre. Formules d'Euler.	

<u>Travaux pratiques</u>

1° Exemples de mise en œuvre des formules de Moivre et d'Euler : linéarisation de polynômes trigonométriques.	Cette activité est à mener en liaison avec l'enseignement des sciences physiques ; toute virtuosité en ce domaine est exclue ; aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques et toutes les indications utiles doivent être fournies.
2° Résolution des équations du second degré à coefficients réels.	La résolution d'équations à coefficients complexes et l'étude des racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe sont hors programme.

FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

On se place dans le cadre des fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$, qui servent à modéliser mathématiquement des "phénomènes continus". Les étudiants devront savoir traiter les situations qui se prêtent à une telle modélisation.

On consolidera les acquis sur les fonctions en tenant compte, notamment sur les limites, des programmes de mathématiques suivis antérieurement par les étudiants.

Ce module de programme énumère les fonctions intervenant dans les autres modules d'analyse, modules où figurent les rubriques de travaux pratiques concernant ces fonctions.

En particulier dans l'ensemble de ces modules, on utilisera largement les moyens informatiques (calculatrice, ordinateur), qui permettent notamment de faciliter la compréhension d'un concept ou d'une méthode en l'illustrant graphiquement, numériquement ou dans un contexte lié à la spécialité considérée, sans être limité par d'éventuelles difficultés techniques.

Les calculs à la main, nécessaires pour développer la maîtrise des méthodes figurant au programme, ont leur cadre défini dans les rubriques de travaux pratiques, le plus souvent dans la colonne de commentaires.

Le champ des fonctions étudiées se limite aux fonctions usuelles suivantes :	Les représentations graphiques doivent jouer un rôle important.
a) Fonctions en escalier, fonctions affines par morceaux, fonction exponentielle $t \mapsto \exp t$ ou $t \mapsto e^t$, fonction logarithme népérien $t \mapsto \ln t$, fonctions puissances $t \mapsto t^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, fonctions circulaires, fonctions qui se déduisent de façon simple des précédentes par opérations algébriques ou par composition.	Selon les besoins des autres disciplines (chimie, acoustique,…), on pourra mentionner la fonction logarithme décimal $x \mapsto \log x$, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
Comparaison des fonctions exponentielle, puissances et logarithme au voisinage de $+\infty$.	
b) Fonctions circulaires réciproques ; on donnera leurs dérivées.	La dérivabilité de ces fonctions sera admise.
c) Fonctions $t \mapsto e^{it}$ et $t \mapsto e^{at}$ avec $a \in \mathbb{C}$.	

CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL 2

Le programme se place dans le cadre de fonctions à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Il n'y a pas lieu de reprendre la présentation des concepts de dérivée et d'intégrale, et aucune difficulté théorique ne doit être soulevée à ce sujet. Les interprétations géométrique et cinématique de la dérivée en un point doivent être connues.
On consolidera et on approfondira les acquis de terminale technologique sur la pratique du calcul des dérivées et des primitives.
Dans le cas de deux variables t et x liées par une relation fonctionnelle $x = f(t)$, on introduira la notation différentielle $\mathrm{d}f = f'(t)\,\mathrm{d}t$; on donnera son interprétation graphique et on montrera l'intérêt de la différentielle pour les problèmes d'approximation. Aucune difficulté ne sera soulevée sur le statut mathématique de la notion de différentielle.
Pour l'intégration, sauf cas indispensable (pour lequel aucune difficulté théorique ne sera soulevée) on se limitera, comme en terminale technologique, au cas de fonctions dérivables.
Aucune théorie de la notion d'aire n'est au programme ; on admettra son existence et ses propriétés élémentaires.
Les exemples de calculs d'approximation cités dans le programme n'ont d'autre but que d'exercer les étudiants à mettre en œuvre, sur des exemples simples, une démarche algorithmique qui puisse être facilement interprétée graphiquement.

a) Étant donné un point a de I et une fonction f dérivable sur I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur zéro au point a.	
Propriétés de l'intégrale : • Relation de Chasles. • Linéarité. • Positivité : si $a \le b$ et $f \ge 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$;	Il conviendra d'interpréter, chaque fois qu'il est possible, ces propriétés en termes d'aire.
intégration d'une inégalité ; inégalité $\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \le \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.	On ne soulèvera aucune difficulté théorique à propos de l'existence de l'intégrale $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.
• Inégalité de la moyenne : si $a \le b$ et $m \le f \le M$, alors $m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le M(b-a)$; de même, si $a \le b$ et si $\|f\| \le k$, alors $\int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t \le k(b-a)$.	
• Inégalité des accroissements finis : si $a \le b$ et si $\|f'\| \le k$, alors $\|f(b)-f(a)\| \le k(b-a)$.	Les théorèmes d'existence (théorème de Rolle, formule des accroissements finis) et la formule de Taylor sont hors programme.
b) Intégration par parties.	
c) Intégration par changement de variable.	On s'appuiera sur les exemples $t \mapsto t+b$ et $t \mapsto at$, où a et b sont des nombres réels, qui donnent lieu à une interprétation graphique, pour présenter sans justification théorique d'autres cas où le changement de variable est donné.
d) Illustration de l'emploi du calcul intégral pour l'obtention de majorations et d'encadrements, à l'aide d'exemples.	On se limitera à des exemples très simples et des indications pour l'encadrement de la fonction à intégrer devront être fournies.
e) Emploi de majorations tayloriennes pour l'obtention du développement limité au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \exp t$.	Le résultat sera démontré, jusqu'à l'ordre 3.
Développements limités des fonctions : $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \cos t$.	Ces résultats seront admis.
f) Dérivée et primitives d'une fonction à valeurs complexes.	Pour ces notions, on se limitera aux fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Travaux pratiques

1° Exemples d'emploi du calcul différentiel pour la recherche d'extremums, l'étude du sens de variation et le tracé des représentations graphiques des fonctions.	Les exemples seront issus, le plus souvent possible, de l'étude de phénomènes rencontrés en sciences physiques, en biologie, en économie ou en technologie. On se limitera aux situations qui se ramènent au cas des fonctions d'une seule variable. Pour la détermination d'une fonction, on pourra être amené à résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss. Il convient de ne pas abuser des problèmes centrés sur l'étude traditionnelle de fonctions définies par une formule donnée *a priori*, dont on demande de tracer la courbe représentative. Toute étude sur le comportement asymptotique d'une fonction devra comporter des indications sur la méthode à suivre.
2° Exemples de tracé de courbes planes définies par une représentation paramétrique $x = f(t)$, $y = g(t)$.	On privilégiera les exemples liés aux autres enseignements (mouvement d'un point, signaux électriques, modélisation géométrique,…). Les étudiants doivent savoir déterminer la tangente en un point où le vecteur dérivé n'est pas nul. Aucune connaissance sur l'étude des points singuliers et des branches infinies n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
3° Exemples simples d'emploi des développements limités pour l'étude locale des fonctions.	Les étudiants doivent savoir utiliser, sur des exemples simples de développements limités, les opérations addition, multiplication et intégration. Pour la composition, des indications sur la méthode à suivre devront être fournies.
4° Exemples de recherche des solutions d'une équation numérique, et de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une solution à l'aide de suites.	Sur des exemples, on mettra en œuvre quelques méthodes classiques : dichotomie, méthode de la corde (Lagrange), méthode de la tangente (Newton). Aucune connaissance spécifique sur celles-ci n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Calcul d'une primitive figurant au formulaire officiel ou s'en déduisant par un changement de variable du type $t \mapsto t + b$ et $t \mapsto at$.	On pourra montrer l'intérêt d'exploiter dans le calcul intégral les propriétés des fonctions périodiques, des fonctions paires et des fonctions impaires.
6° Calcul d'une primitive d'une fonction rationnelle dans le cas de pôles simples.	Dans le cas où il y a des pôles multiples, des indications doivent être données sur la méthode à suivre.
7° Calcul d'une primitive d'une fonction exponentielle-polynôme (de la forme $t \mapsto \mathrm{e}^{at} P(t)$ où a est un nombre complexe et où P est un polynôme).	Les étudiants devront savoir traiter les cas qui s'y ramènent simplement par linéarisation.
8° Exemples de calcul d'intégrales.	Tout excès de technicité est à éviter pour le calcul des primitives.
9° Exemples de calcul d'aires, de volumes, de valeurs moyennes, de valeurs efficaces.	On pourra aussi, selon la spécialité, proposer des exemples de détermination de centres d'inertie et de calcul de moments d'inertie.
10° Exemples de mise en œuvre d'algorithmes d'approximation d'une intégrale.	L'objectif est de familiariser les étudiants avec quelques méthodes élémentaires (point-milieu, trapèzes), mais aucune connaissance sur ces méthodes n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

Il s'agit de consolider et d'approfondir les connaissances acquises les années antérieures.
On s'attachera, d'une part à étudier des situations issues de la technologie, d'autre part à relier cet enseignement à celui de l'économie et gestion.

a) Séries statistiques à une variable : Méthodes de représentation. Caractéristiques de position (médiane, moyenne). Caractéristiques de dispersion (interquantiles, variance, écart type).	Il s'agit, d'une part de préciser la signification de chaque caractéristique, d'autre part d'associer la précision des résultats numériques obtenus (à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur) à la précision sur les données et à la méthode mise en œuvre, notamment dans le cas où les classes sont définies par des intervalles.
b) Séries statistiques à deux variables : Tableaux d'effectifs. Nuage de points ; point moyen. Ajustement affine (méthode graphique ; méthode des moindres carrés, droites de régression). Coefficient de corrélation linéaire.	Pour l'ajustement affine, on distinguera liaison entre deux variables statistiques et relation de cause à effet. Pour la méthode des moindres carrés, on fera observer que l'on crée une dissymétrie entre les deux variables statistiques qui conduit, suivant le problème à résoudre, à privilégier l'une des deux droites.

Travaux pratiques

1° Étude de séries statistiques à une variable.	On interprétera les résultats obtenus.
2° Exemples d'étude de séries statistiques à deux variables.	En fournissant aux étudiants des indications sur la marche à suivre, on pourra, d'une part étudier quelques exemples d'ajustement qui, par un changement de variable simple, se ramènent à un ajustement affine, d'autre part, à propos des séries chronologiques, procéder à un lissage obtenu, par exemple, par la méthode des moyennes mobiles, avant d'effectuer, si nécessaire, un ajustement affine ; mais aucune connaissance sur ces démarches n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques

CALCUL DES PROBABILITES 2

Il s'agit d'une initiation aux phénomènes aléatoires où toute ambition théorique et toute technicité sont exclues.
L'objectif est que les étudiants sachent traiter quelques problèmes simples concernant des variables aléatoires dont la loi figure au programme. Les sciences et techniques industrielles et économiques fournissent un large éventail de tels problèmes, que l'on pourra étudier en liaison avec les enseignements des disciplines professionnelles.

a) Probabilités sur les ensembles finis : Vocabulaire des événements, probabilité. Probabilité conditionnelle, événements indépendants. Cas d'équiprobabilité.	L'ensemble des événements sera pris égal à l'ensemble de toutes les parties de Ω.
Notation $n!$. Combinaisons.	Ces notions sont introduites pour présenter la loi binomiale. Les calculs de dénombrement ne sont pas un objectif du programme.
Loi faible des grands nombres.	Il s'agit de faire comprendre aux étudiants le lien entre statistiques et probabilités. Une approche expérimentale et un énoncé rudimentaire suffisent.
b) Variables aléatoires discrètes à valeurs réelles : Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Indépendance de deux variables aléatoires.	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur les variables aléatoires. On pourra utiliser la notation Σ, mais aucune connaissance à son sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
Espérance mathématique de $aX + b$, de $X + Y$ et de $X - Y$; variance de $aX + b$, de $X + Y$ et de $X - Y$ dans le cas où X et Y sont indépendantes. Loi binomiale, loi de Poisson.	
c) Variables aléatoires continues à valeurs réelles : Fonction de répartition et densité de probabilité. Espérance mathématique, variance, écart type. Loi normale.	L'exemple de la loi normale est suffisant. On pourra, en vue de l'étude de la fiabilité, présenter la loi exponentielle. On sera amené à utiliser les notations $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, mais aucune connaissance sur les intégrales impropres n'est exigible en calcul de probabilités.
Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales : • les variables $aX + b$, $X + Y$ et $X - Y$ suivent des lois normales ;	Le résultat est admis.
• formules donnant l'espérance mathématique et la variance de $aX + b$, de $X + Y$ et de $X - Y$, dans le cas où X et Y sont indépendantes.	Les formules sont admises.
d) Théorème de la limite centrée : approximation par une loi normale de la somme de n variables indépendantes, de même loi et de variance finie. Distribution d'échantillonnage asymptotique de la moyenne et de la fréquence empirique.	
e) Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale.	Les résultats sont admis, mais l'outil informatique peut permettre des approches expérimentales. Aucune connaissance sur les critères d'approximation n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. Les étudiants doivent savoir déterminer les paramètres. Il conviendra de mettre en évidence la raison d'être de la correction de continuité lors de l'approximation d'une loi binomiale par une loi normale ; toutes les indications seront fournies.

Travaux pratiques

1° Calcul de probabilités portant sur l'union et sur l'intersection de deux événements.	On ne traitera que quelques exemples très simples de probabilités conditionnelles.
2° Étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale.	L'énoncé des critères permettant l'utilisation de la loi binomiale est exigible.
3° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi de Poisson.	
4° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi normale.	Aucune connaissance sur l'interpolation affine avec la table de la loi normale centrée réduite n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.
5° Exemples d'étude de situations de probabilités faisant intervenir des variables aléatoires suivant une loi binomiale que l'on approche par une loi de Poisson ou une loi normale.	

CALCUL VECTORIEL

L’objectif est de consolider et de développer certains acquis de terminale technologique concernant le calcul vectoriel.

Vecteurs (position, vitesse, accélération, force). Barycentres (centres d'inertie). Produit scalaire (longueurs, angles, puissance, travail). Produit vectoriel (aires, angles, moments cinétique et dynamique, moment d'une force en un point). Produit mixte (volumes, moment d'une force par rapport à un axe).	On soulignera le lien avec les concepts correspondants en sciences physiques et en mécanique, mais aucune connaissance en cinématique ou en dynamique n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques. En outre, on pourra être amené à donner quelques notions sur les vecteurs glissants et sur les torseurs, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.