LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LA MUSIQUE OU L'ART DE FAIRE ENTENDRE LES NOMBRES

Mots-clés

Intervalle musical ; octave ; quinte ; gammes.

Références au programme

La musique et les mathématiques sont deux langages universels. Les Grecs anciens les ont dotés d'une origine commune puisque la théorie pythagoricienne des proportions avait pour but de percer les secrets de l'harmonie musicale. Depuis, les évolutions de la musique et des mathématiques se sont enrichies mutuellement.

Savoirs

Intervalle musical, octave, quinte, cycle des quintes, gammes de Pythagore, gamme tempérée.

Savoir-faire

- Mettre en place un raisonnement mathématique pour prouver que le cycle des quintes est infini.
- Utiliser la racine douzième de 2 pour partager l'octave en douze intervalles égaux.

Notions mathématiques mobilisées

- Fractions, quotients, puissances (notamment les puissances de 2).
- Nombres rationnels et irrationnels.
- Arithmétique.

Nombres rationnels et irrationnels

- Un nombre est rationnel s'il peut s'écrire comme quotient de deux nombres entiers. Par exemple, 0,75 et $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ sont des nombres rationnels puisqu'ils peuvent aussi s'écrire respectivement $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{2}$.
- Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire comme quotient de deux entiers. Par exemple, $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel (il est possible de démontrer ce résultat à l'aide d'un raisonnement par l'absurde).

Histoire, enjeux, débats

- La vision de l'Univers selon l'école de Pythagore.
- La gamme à tempérament mésotonique ; la gamme tempérée de Werckmeister et son utilisation par Bach.
- Les premières gammes à tempérament égal (Rameau et d'Alembert).

Les mathématiques et la musique

Pour reprendre une citation extraite d'un courrier adressé par Leibnitz à Goldbach en 1712, « La musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie des nombres ».

L'étude des intervalles musicaux et des gammes permet en effet de manipuler les nombres (rationnels pour les gammes dites de Pythagore, irrationnels pour les gammes au tempérament égal) et d'entendre les sons associés. Les premières gammes musicales auraient été créées par l'école pythagoricienne au VIe siècle avant J.-C.

Le système musical des Grecs anciens était construit à partir de la position des doigts sur un instrument très simple appelé monocorde. En faisant varier la longueur d'une corde, à l'aide de chevalets, les Pythagoriciens ont constaté que plus la longueur de la corde est courte, plus le son émis est aigu. En plaçant un chevalet exactement au milieu de la corde, ils ont constaté que les deux moitiés produisaient exactement le même son, ressemblant d'ailleurs beaucoup à celui produit par la vibration de la corde entière. On sait aujourd'hui qu'un son est une variation de la pression de l'air au cours du temps. Dans le cas d'un son pur, cette variation de la pression est représentée par une courbe particulière, appelée sinusoïde. Un son composé résulte de la combinaison d'un son simple principal, appelé le fondamental et de sons complémentaires, appelés harmoniques. Le son fondamental fixe la fréquence perçue par l'oreille, appelée hauteur du son, ou fréquence fondamentale. Les fréquences des harmoniques sont toutes des multiples de la fréquence fondamentale. Mathématiquement, un son composé est représenté par une fonction périodique. Nous savons aujourd'hui, grâce à la théorie de Joseph Fourier (1768-1830), qu'une telle fonction peut être décomposée en une somme infinie de fonctions trigonométriques (représentant des sons purs) dont les fréquences sont multiples de l'une d'elle (la fréquence fondamentale). De ce fait, si f est la fréquence fondamentale d'un son composé, les fréquences $2f$ et $3f$ sont également contenues dans le spectre du son ; ce sont les fréquences des harmoniques de rang 2 et de rang 3. C'est la raison pour laquelle la combinaison de deux sons dont les fréquences sont dans un rapport $2/1$ ou $3/2$ est agréable à l'oreille. Ces sons sont dits consonants. Ces aspects sont détaillés dans la ressource « Les sons purs et composés ».

Ces considérations n'étaient pas connues des Grecs anciens. Le fait que deux sons dont les fréquences fondamentales sont dans le rapport 2 ont la même consonance était pour eux une preuve que l'harmonie de l'univers est régie par les nombres. Selon la théorie pythagoricienne, les accords musicaux les plus harmonieux s'expriment par les rapports arithmétiques les plus simples. Les Pythagoriciens furent les premiers à établir les quatre consonances fondamentales de la gamme musicale. Ces consonances, qui correspondent à des rapports de fréquence, sont l'unisson (de rapport 1/1), l'octave (de rapport 2/1), la quinte (de rapport 3/2) et la quarte (de rapport 4/3), dont elle est le « renversement » de la quinte.

Principe de construction des gammes de Pythagore

Une octave est un intervalle musical dans lequel le rapport des fréquences entre l'extrémité et l'origine est égal à 2. Comme toute la théorie est fondée sur des rapports de fréquences, on décide ici de simplifier les calculs en fixant à 1 la fréquence f_0 de l'origine de l'octave, qui correspond à une note de référence (440 Hz pour le La du diapason ou 262 Hz pour le Do 3). On verra ultérieurement qu'on peut aussi démarrer le cycle des quintes avec une autre valeur.

On retrouvera ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence. L'octave est donc représentée par l'intervalle musical [1,2].

On veillera à bien distinguer cet intervalle musical, dans lequel l'écart entre deux notes est défini par le rapport des fréquences entre la note la plus aigüe et la note la plus grave, d'un intervalle mathématique habituel, dans lequel l'écart entre deux nombres est défini par la valeur absolue de leur différence.

Une gamme est une suite finie de notes « régulièrement » réparties (au sens du rapport de leurs fréquences) sur une octave.

Après le rapport $\frac{2}{1}$ qui définit l'octave, le rapport le plus simple est la quinte pure, égale à $\frac{3}{2}$. C'est la fréquence du son obtenu en faisant vibrer le tétracorde aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur. L'échelle pythagoricienne est fondée sur ces deux seuls intervalles, l'octave et la quinte pure, à partir desquels sont construites toutes les notes de la gamme, selon le cycle des quintes.

Après avoir calculé la quinte correspondant au rapport $3/2$, on calcule la quinte de la quinte $\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$.

Comme $\frac{9}{4} > 2$, la quinte de la quinte est sortie de l'octave. On l'y ramène en divisant $\frac{9}{4}$ par 2, ce qui donne $\frac{9}{8}$.

On poursuit le procédé en calculant la quinte de la quinte de la quinte, que l'on ramène si nécessaire dans l'octave (c'est-à-dire entre 1 et 2) en divisant par 2. Cette division par 2 correspond à l'identification de sons correspondant à une même note, l'un étant une octave plus grave que l'autre. On construit ainsi une suite de rapports de plus en plus complexes.

Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « Construction de la gamme Pythagoricienne ». Cette animation permet de construire pas à pas la gamme en faisant entendre, à chaque étape, les quintes obtenues.

On constate qu'aucun de ces rapports ne vaut 1 ou 2 (on dit que le cycle des quintes ne « reboucle pas »). Un raisonnement mathématique très simple (par l'absurde) permet de démontrer que la suite des quintes ramenées à l'octave est infinie.

En effet, si la suite des quintes ramenées à l'octave repassait par une valeur déjà atteinte, alors il existerait un couple d'entiers (k,n) tel que $\frac{3^k}{2^n}=1$ c'est-à-dire $3^k=2^n$. Or 3^k est impair alors que 2^n est pair. L'égalité est donc impossible.

Puisqu'aucune quinte de la suite ne revient sur 1 ou 2 alors qu'on souhaite construire un nombre fini de quintes dans l'intervalle [1,2], on est amené à chercher une valeur de k pour laquelle la k-ième quinte « se rapproche » de 1 ou de 2 (donc de la note située sur la note initiale ou à l'octave de la note initiale). On voit dans le tableau ci-dessous que la cinquième quinte correspond à une fréquence proche de 2 puisqu'elle est égale à 1,898 4. On décide de l'identifier à la note initiale. On réordonne ensuite les quintes par ordre croissant et on donne un nom aux notes associées. On a ainsi construit la gamme pentatonique (gamme à 5 notes) de Pythagore.

Les notes de la dernière ligne du tableau correspondent au cas où la note de référence est un do (par exemple f_0 = 264 Hz).

k	0	1	2	3	4	5
Quinte	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5}=\frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$
Quinte ramenées à l'octave	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6}=\frac{81}{64}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$
Valeur décimale approchée	1	1,5	0,178 0	1,687 5	1,265 7	$1{,}8984 \approx 2$
Quintes ordonnées	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	2
Exemple de gamme si la première note est un Do	Do	Ré	Mi	Sol	La	Do
Rapport de fréquences entre 2 notes consécutives		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$

On peut poursuivre la suite des quintes et constater que la huitième quinte ramenée à l'octave est presqu'égale à 1. On construit ainsi une gamme de Pythagore à sept notes.

Quintes dans l'ordre d'apparition	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5}=\frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^8}=\frac{729}{256}$	$\frac{3^7}{2^{10}}=\frac{2187}{1024}$
Quintes ramenées à l'octave	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6}=\frac{81}{64}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^9}=\frac{729}{512}$	$\frac{3^7}{2^{11}}=\frac{2187}{2048}$
Valeurs décimales approchées	1	1,5	1 125	1,687 5	1,265 6	1,898 4	1,423 8	1,067 9
Quintes ordonnées	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	
Exemple de gamme si la première note est un Do	Do	Ré	Mi	Fa#	Sol	La	Si	

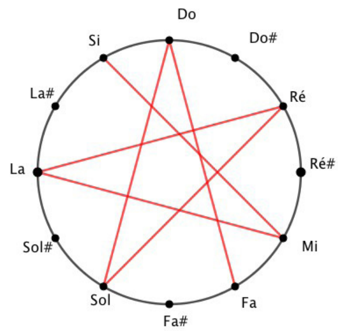
Rapport de fréquences entre 2 notes consécutives		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	

Pour construire la gamme habituelle à sept notes (dite gamme diatonique) et entendre comme quatrième note un Fa et non un Fa#, il suffit de prendre comme fréquence de départ non pas 1, mais $\frac{4}{3}$ (la quarte). On remarque ici que $\frac{4}{3}\times\frac{3}{2} = 2$. La quinte de la quarte est égale à l'octave (que l'on peut assimiler à la note initiale, de fréquence 1). C'est en ce sens que la quarte est le « renversement » (au sens de l'inverse) de la quinte.

Le cycle ne reboucle toujours pas exactement, mais presque, au bout de la huitième quinte.

Quintes dans l'ordre d'apparition	$\frac{4}{3}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5}=\frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^8}=\frac{729}{256}$
Quintes ramenées à l'octave	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6}=\frac{81}{64}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^9}=\frac{729}{512}$
Valeurs décimales approchées	1,333 3	1	1,5	1 125	1,687 5	1,265 6	1,898 4	1,4238 ≈ 1,33 ≈ 1,33
Quintes ordonnées	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	
Exemple de gamme	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	
Rapport de fréquences entre notes consécutives		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$

La « ronde » des quintes dans leur ordre d'apparition

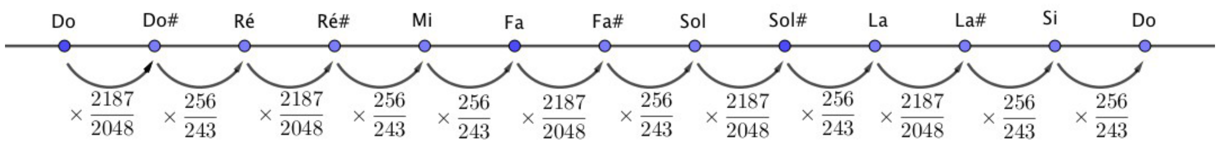


Selon le même principe, on peut poursuivre encore le cycle des quintes jusqu'à la treizième quinte (qui est presqu'égale à la quarte de départ).

On a ainsi construit la gamme de Pythagore à douze notes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Quintes dans l'ordre d'apparition	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^5}=\frac{81}{32}$	$\frac{3^5}{2^7}=\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^8}=\frac{729}{256}$	$\frac{3^7}{2^{10}}=\frac{2187}{1024}$	$\frac{3^8}{2^{12}}=\frac{6561}{4096}$	$\frac{3^9}{2^{13}}=\frac{19683}{8192}$	$\frac{3^{10}}{2^{14}}=\frac{59059}{16384}$	$\frac{3^{11}}{2^{16}}=\frac{177147}{65536}$
Quintes ramenées à l'octave	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}$	$\frac{3^3}{2^4}=\frac{27}{16}$	$\frac{3^4}{2^6}=\frac{81}{64}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{3^6}{2^9}=\frac{729}{512}$	$\frac{3^7}{2^{11}}=\frac{2187}{2048}$	$\frac{3^8}{2^{12}}=\frac{6561}{4096}$	$\frac{3^9}{2^{13}}=\frac{19683}{16384}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}=\frac{59059}{32768}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}=\frac{177147}{131072}$
Valeurs décimales approchées	1,3	1	1,5	1,125	1,6875	1,2656	1,8984	1,4238	1,0678	1,6018	1,2013	1,8020	1,3515
Quintes ordonnées	1	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{19683}{16384}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{729}{512}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6561}{4096}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{59059}{32768}$	$\frac{243}{128}$	2
Nom des notes	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
Rapport entre deux notes consécutives		$\frac{2187}{2048} \approx 1{,}0679$	$\frac{256}{243} \approx 1{,}05344$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$

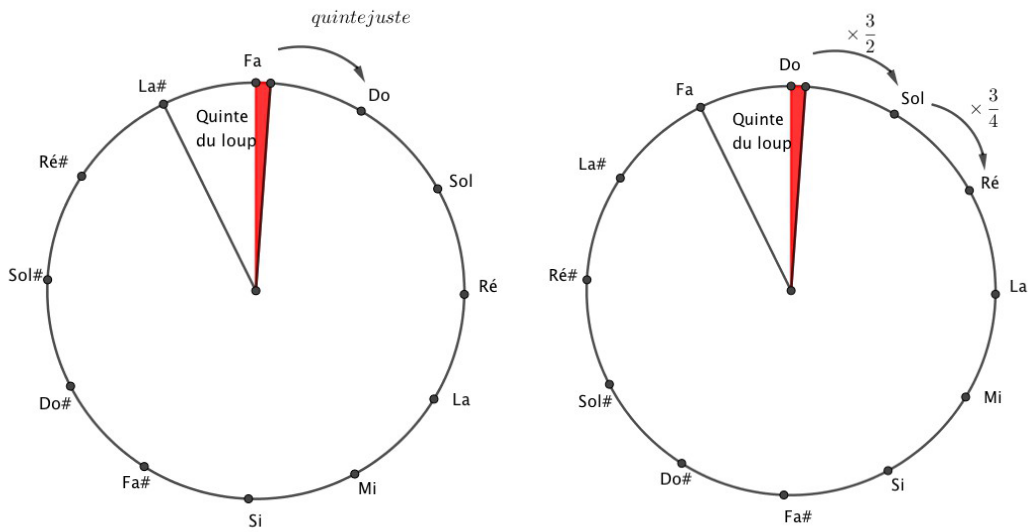
La gamme de Pythagore à 12 notes



Les problèmes posés par les gammes de Pythagore

La quinte du loup

Dans une gamme de Pythagore à 5, 7 ou 12 notes, l'une des quintes n'est pas pure (sa valeur a été choisie pour arrêter le cycle alors qu'on ne rebouclait pas exactement sur 1). Cette quinte, appelée la quinte du loup parce qu'elle rappelle le hurlement du loup, n'est pas consonante avec les autres (elle sonne faux). L'écart entre la quinte du loup et les autres quintes est appelé comma pythagoricien (représenté en rouge ci-dessous). Pour contourner cette difficulté, les compositeurs choisissaient de positionner la quinte du loup dans le cycle sur un intervalle peu utilisé dans leur composition musicale, généralement entre Si et Fa#.



La transposition

Chacune des dernières lignes des tableaux précédents fait apparaître que les intervalles correspondant aux notes successives de la gamme ne sont pas tous égaux. On dit que les gammes de Pythagore sont à tempéraments inégaux. Ainsi, la gamme à sept notes fait apparaître des intervalles de rapport $\frac{9}{8}$ (qui définit le ton pythagoricien) et des intervalles de rapport $\frac{256}{243}$, appelé limma pythagoricien (très légèrement inférieur à un demi-ton puisque $(\frac{256}{243})^2 < \frac{9}{8}$).

L'existence de ces deux types d'intervalles pose problème pour la transposition d'un morceau de musique, qui consiste à décaler d'un intervalle fixe toutes les notes de ce morceau afin de l'adapter à la tonalité des instruments ou de la voix. Par exemple, un claveciniste accompagnant une mezzo-soprano pourrait vouloir baisser d'un limma chaque note d'un morceau écrit pour une soprano.

Dans le cas de la gamme pythagoricienne à 12 notes, les notes obtenues ne vont alors pas toutes retomber exactement sur des notes de la gamme. Le Fa va bien se retrouver sur le Mi et le Do sur le Si, mais les autres arriveront à côté des notes existantes.

Ceci est dû à la coexistence de deux types deux types d'intervalles : un intervalle de rapport $\frac{2187}{2048}$ appelé demi-ton chromatique et un intervalle de rapport $\frac{256}{243}$ appelé demi-ton diatonique.

La gamme tempérée

Le modèle des gammes à tempérament égal permet de régler le problème de la transposition. En effet, pour pouvoir transposer dans toutes les tonalités, il suffit que l'intervalle entre deux notes consécutives d'une octave soit toujours le même. Mathématiquement, dans le cas d'une gamme à douze notes, on cherche donc un nombre t qui permet de partager l'octave en douze intervalles égaux. On passe dans ce cas de la fréquence de référence 1 à la fréquence 2 par douze multiplications successives par un certain nombre k. Ainsi, $k^{12} = 2$ et $k = 2^{1/12}$ encore noté $\sqrt[12]{2}$ (racine douzième de 2). Par une démonstration similaire à celle de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ étudiée par les élèves en classe de seconde, on peut démontrer que le nombre $\sqrt[12]{2}$ est irrationnel. C'est la valeur du demi-ton tempéré. La gamme tempérée a été inventée à la fin du XVIIe siècle par A. Werckmeister. Dans ses *Éléments de musique* (1752), d'Alembert insiste sur les douze demi-tons égaux de la gamme tempérée à douze notes. La construction de ces douze demi-tons égaux nécessitait d'admettre que des sons harmonieux pouvaient provenir de rapports de fréquences irrationnels. C'est le prix à payer pour permettre toutes les transpositions sans altération de la musique. Il fallut attendre 1825 pour que la gamme tempérée s'impose dans la musique occidentale où elle est toujours utilisée de nos jours.

Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « [Fréquences et notes de la gamme tempérée]() ». Cette animation permet de construire une gamme à tempérament égal et d'écouter les notes associées.

Activités possibles

Activité 1 : octaves

1. Sachant que la fréquence du Do 0, arrondie au Hz, est de 33 Hz, calculer la fréquence du Do 1 situé une octave au-dessus du Do 0.
2. L'oreille humaine est capable de percevoir des sons dont la fréquence est comprise entre 20 Hz et 20 000 Hz. Déterminer le nombre de Do différents audibles par l'oreille humaine.
3. La note la plus basse d'un piano a une fréquence de 27,5 Hz et la note la plus haute a une fréquence d'environ 4 186 Hz. Combien y a-t-il d'octaves dans un piano ?

Activité 2 : construction pas-à-pas de la suite des quintes ramenées à l'octave

1. L'algorithme suivant permet de construire la suite des quintes à partir de $f = 1$.

$f \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à n faire
    $f \leftarrow \frac{3}{2} f$
    Si $f \geq 2$ alors
    $f \leftarrow \frac{1}{2} f$
    FinSi
FinPour

1.1. Démontrer que, si $1 \leq f < 2$, alors :
ou bien $1 \leq \frac{3}{2} f < 2$ (la fréquence se situe dans l'octave) ;
ou bien $2 \leq \frac{3}{2} f$ et $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} f < 2$ (on ramène la fréquence dans l'octave par division par 2).
1.2. Calculer à la main les valeurs obtenues pour les 6 premières fréquences. Les exprimer sous forme de quotients d'une puissance de 3 par une puissance de 2.
1.3. Coder cet algorithme en Python pour qu'il renvoie la liste des 13 premières fréquences obtenues.
1.4. Parmi les fréquences obtenues, y en a-t-il une égale à 1 ? Si non, lesquelles s'en approchent le plus ?

2. Démontrer que l'équation $\frac{3^n}{2^m} = 1$, d'inconnue le couple d'entiers (n, m), n'a pas de solution.
3. En déduire que le cycle des quintes ne reboucle pas.

Activité 3 : construction au tableur de la suite des quintes à partir de la suite des puissances de 3/2

1. À l'aide d'un tableur, construire les 20 premiers éléments des suites de termes généraux $2^k, 3^k, (\frac{3}{2})^k$. À partir des valeurs décimales approchées de $(\frac{3}{2})^k$, trouver la valeur de l'entier n tel qu'en divisant $(\frac{3}{2})^k$ par 2^n on se ramène dans l'octave.

k	Puissances de 3	Puissances de 2	Quotient	2^n	Quinte ramenée dans l'octave
0	1	1	1,00		
1	3	2	1,50		
2	9	4	2,25	2	1,125
3	27	8	3,38	2	1,6875
4	81	16	5,06	4	1,265625
5	243	32	7,59	4	1,8984375
6	729	64	11,39	8	1,423828125
7	2187	128	17,09	16	1,067871094
8	6561	256	25,63	16	1,601806641
9	19683	512	38,44	32	1,20135498
10	59049	1024	57,67	32	1,802032471
11	177147	2048	86,50	64	1,351524353
12	531441	4096	129,75	128	1,013643265
13	1594323	8192	194,62	128	1,520464897
14	4782969	16384	291,93	256	1,140348673
15	14348907	32768	437,89	256	1,710523009
16	43046721	65536	656,84	512	1,282892257
17	129140163	131072	985,26	512	1,924338385
18	387420489	262144	1477,89	1024	1,443253789
19	1162261467	524288	2216,84	2048	1,082440342
20	3486784401	1048576	3325,26	2048	1,623660513
21	10460353203	2097152	4987,89	4096	1,217745385

2. Démontrer que l'équation $\left(\frac{3}{2}\right)^k = 2^n$ d'inconnue le couple d'entiers (k, n) n'a pas de solution.

Activité 4 : la gamme tempérée

On appelle demi-ton tempéré la solution positive de l'équation $x^{12} = 2$.

1. Par tâtonnement et à l'aide d'une calculatrice, trouver un encadrement à 10^{-2} près du demi-ton tempéré.
2. Par une méthode de balayage et à l'aide d'un tableur, calculer une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du demi-ton tempéré.
3. Écrire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée à 10^{-k} près du demi-ton tempéré, par dichotomie ou par balayage. Programmer cet algorithme en Python.
4. Expliquer pourquoi le ton tempéré est le carré du demi-ton tempéré. Calculer une valeur décimale approchée à 10^{-2} près du ton tempéré.
5. Sachant que la quinte tempérée est égale à sept demi-tons tempérés, la calculer et la comparer à la quinte pure.

Intentions pédagogiques

Les calculs figurant dans les tableaux ci-dessus sont présentés pour expliquer le principe de construction des gammes dites de Pythagore. L'objectif pédagogique n'est pas de faire faire aux élèves l'intégralité de ces calculs. Cependant, il est essentiel qu'à travers la construction des gammes de Pythagore, ils manipulent des fractions, des puissances et les opérations qui s'y rapportent afin de consolider leurs connaissances et leur pratique des nombres rationnels, la maîtrise de ce type de calculs faisant partie du bagage mathématique de base de tout citoyen.

Les animations GeoGebra ©, présentées en classe par le professeur, permettent à la fois d'automatiser le calcul des quintes successives, de consigner dans le tableur les fréquences associées et d'entendre les sons.

Les programmes en Python, complétés par les élèves à partir de lignes de commande fournies, permettent de travailler des algorithmes simples et d'écouter des sons.

L'introduction de la racine douzième de 2 peut être précédée par la recherche d'une valeur approchée de la solution positive de l'équation $x^{12} = 2$ à l'aide d'une méthode de balayage ou de dichotomie.

Pour aller plus loin : la musique contemporaine

Des compositeurs comme Iannis Xénakis et Pierre Boulez utilisent dans leurs écritures musicales des sons déterminés aléatoirement sur ordinateur et composent à l'aide d'algorithmes : on parle de musique stochastique.

Les techniques numériques d'échantillonnage consistent à remplacer une onde sonore, définie par la mesure continue $p(t)$ de la pression de l'air en fonction du temps, par une suite discrète d'échantillons $p_n(t)$, réalisant ainsi une synthèse de sons, y compris de ceux que ne peuvent produire des instruments de musique ordinaires. La ressource « numérisation du son » détaille ces aspects.

Bibliographie et sitographie

- Maths et musique Hors-série n° 11 Tangente.
- Pourquoi les maths ? Ellipses : chapitre 4 « la portée des mathématiques »
- Conférence du collège de France : D'où nous viennent nos idées et comment évoluent-elles ? La créativité en mathématiques et en musique.
- Document de travail (ressources d'accompagnement du programme de la série TMD).