LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LA FORME DE LA TERRE ET LES MESURES À LA SURFACE DE LA TERRE

Mots-clés

Latitude, longitude, méridien, grand cercle, triangulation

Références au programme

L'environnement « plat » à notre échelle de perception cache la forme réelle de la Terre, dont la compréhension résulte d'une longue réflexion. Au-delà de la dimension historique et culturelle, la mise en œuvre de différentes méthodes de calcul de longueurs à la surface de la Terre permet de développer des compétences mathématiques de calcul et de représentation et invite à exercer un esprit critique sur les différents résultats obtenus, les approximations réalisées et les limites d'un modèle.

Savoirs

Dès l'Antiquité, des observations de différentes natures ont permis de conclure que la Terre était sphérique, alors même que, localement, elle apparaît plane dans la plupart des expériences quotidiennes.

Historiquement, des méthodes géométriques ont permis de calculer la longueur d'un méridien (environ 40 000 km) à partir de mesures d'angles ou de longueurs : méthodes dite d'Ératosthène et de triangulation plane. On repère un point à la surface de la Terre par deux coordonnées angulaires, sa latitude et sa longitude. Le plus court chemin entre deux points à la surface de la Terre est l'arc du grand cercle qui les relie.

Savoir-faire

- Calculer la longueur du méridien terrestre par la méthode dite d'Ératosthène.
- Calculer une longueur par la méthode de triangulation utilisée par Delambre et Méchain.
- Calculer le rayon de la Terre à partir de la longueur du méridien.
- Calculer la longueur d'un arc de méridien et d'un arc de parallèle.
- Comparer, à l'aide d'un système d'information géographique, les longueurs de différents chemins reliant deux points à la surface de la Terre.

Notions mathématiques mobilisées

- Proportionnalité.
- Géométrie dans le plan : angles alternes-internes, trigonométrie.
- Géométrie dans l'espace : repérage, sections planes de la sphère projections planes.
- Courbes à la surface de la Terre : méridiens, parallèles, géodésiques.

SOMMAIRE

Histoire, enjeux et débats

La forme de la Terre

Au fil de l'Histoire, la forme de la Terre a posé question. Désormais, l'observation de la Terre depuis l'espace permet de constater qu'elle est presque ronde.

Avant la maîtrise des connaissances et des techniques pour effectuer une telle observation, la forme et la taille de la Terre ont suscité bien des débats scientifiques et se sont trouvées au cœur de nombreux enjeux.

Les éléments de cosmologie chinoise (quatrième siècle avant notre ère) reposent sur une Terre dont la surface est plane, en forme de disque, et sur un Soleil situé sur une demi-sphère s'appuyant sur le disque formé par la surface de la Terre.

Au Ve siècle av. J.-C., la Terre est considérée par les philosophes grecs comme étant plate, de la forme d'un disque, entièrement ceinturée par le fleuve Océan et recouverte d'un ciel en coupole hémisphérique. Cette conception, à l'origine de mesures effectuées par Anaxagore, fut remise en cause dès le IVe siècle avant J.-C.

Platon (v. 428-348 av. J.-C.) justifie la rotondité de la Terre par deux observations :

- lors des éclipses de Lune, l'ombre projetée de la Terre est circulaire ;
- la configuration des cieux étoilés (hauteur des étoiles sur l'horizon) change lors des déplacements en latitude ; cela s'explique par la courbure de la Terre faisant obstacle à une vision complète du ciel.

Aristote (v. 384-322 av. J.-C.) donne quant à lui une explication – physique – à la rotondité de la Terre, en faisant apparaître la notion de figure d'équilibre.

Plus tard, Strabon (v. 58 av. J.-C. - 23 apr. J.-C.) observe que lorsqu'un bateau s'éloigne d'un port, sa coque, progressivement masquée par l'horizon (la courbure de la Terre), disparaît avant son mât.

Mesures du méridien terrestre

C'est à Ératosthène (284-192 av. J.-C.), pour qui la Terre était ronde, que serait attribuée la première estimation précise de la circonférence terrestre.

À Syène – aujourd'hui Assouan, dans la haute vallée du Nil en Égypte – le jour du solstice d'été à midi, les rayons du Soleil éclairent le fond des puits. Au même moment, à Alexandrie, ville située à peu près sur le même méridien, le soleil n'est déjà plus au zénith.

En s'appuyant sur le modèle d'une Terre sphérique située à distance infinie du soleil, Ératosthène aurait réalisé une étude géométrique et des calculs de proportionnalité lui permettant d'obtenir une valeur approchée de la circonférence terrestre.

Histoire et définition du mètre

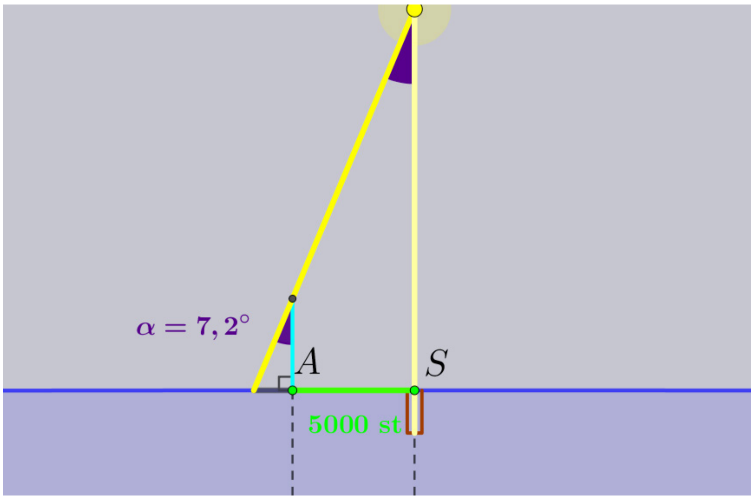
Sous l'Ancien Régime, les seigneurs locaux imposent leurs mesures et leurs unités. L'expression « deux poids et deux mesures » devient en 1788 le symbole de l'inégalité, de l'injustice et du pouvoir des seigneurs. La Révolution française supprime le monopole seigneurial des poids et des mesures en abolissant les droits féodaux. Le climat de réforme qui suit ces éléments révolutionnaires permet de précipiter le choix d'un étalon. L'idée est d'assurer l'invariabilité des mesures en les rapportant à un étalon universel qui ne soit fondé sur aucune vanité nationale, permettant ainsi l'adhésion de toutes les nations étrangères.

En 1791, Delambre et Méchain sont chargés par l'Assemblée Constituante de calculer la longueur de l'arc de méridien reliant Dunkerque à Barcelone afin de définir le mètre comme étant le dix millionième du quart du méridien terrestre. Ces travaux prennent plus de sept ans et conduisent ces deux scientifiques à effectuer des milliers de mesures pour réaliser une triangulation de Dunkerque à Barcelone : les deux tiers supérieurs, de Dunkerque à Rodez, incombent à Delambre, et le tiers inférieur de Rodez à Barcelone revient à Méchain. Les récits historiques témoignent d'une épopée très mouvementée.

Les mathématiques, la forme de la Terre et les mesures à la surface de la Terre

De tout temps, les mathématiques ont permis de représenter des objets inaccessibles à la vision directe et de calculer des longueurs inaccessibles à la mesure directe. La forme de la Terre et le calcul de la longueur du méridien en sont des exemples historiques. Les outils, objets et concepts mathématiques utilisés pour réaliser ces représentations et ces calculs opèrent non pas sur la réalité, mais sur des modèles. Un modèle, reposant sur des hypothèses, est une représentation simplifiée de la réalité.

Anaxagore (né vers 500 av. J.-C. et mort en 428 av. J.-C.) est un philosophe grec dont la théorie cosmique n'attribue pas les phénomènes célestes aux Dieux du Panthéon. Pour Anaxagore, la Terre est plate, de la forme d'un disque, alors que le Soleil est rond et à distance finie de la Terre. Vers l'an 434 av. J.-C., il estime la distance de la Terre au Soleil et le diamètre du soleil. Des voyageurs revenant de la ville de Syène (représentée sur la figure par la lettre S), en haute vallée du Nil (près du barrage d'Assouan) lui ont appris que le 21 juin, jour du solstice d'été, à midi, le Soleil se trouve exactement à la verticale du lieu, et donc que les objets verticaux n'ont pas d'ombre portée. D'autre part, il sait qu'Alexandrie (représentée par la lettre A), située à 5000 stades (800 km environ) au nord de Syène, le Soleil est ce même jour à midi, à 7,2° (un cinquantième de tour) de la verticale.



Anaxagore (500 av. J.-C.) suppose la Terre plate et mesure la distance au Soleil.

Cela lui permet de calculer la distance d entre Alexandrie et le Soleil : la distance obtenue, en stades, correspond à 6500 km). À partir de ce résultat, mesurant le diamètre apparent du Soleil (0,5°), il calcule le diamètre du Soleil (correspondant à 57 km). Accusé de porter atteinte aux dogmes de la religion, il est arrêté, puis banni d'Athènes, sa ville natale. Les calculs mathématiques d'Anaxagore sont corrects, mais l'hypothèse à la base de son modèle est fausse.

Deux siècles plus tard, le modèle d'Anaxagore est soi-disant réexaminé par Ératosthène. Pour lui, la Terre est ronde, comme le Soleil. On prétend qu'il fait l'hypothèse que la distance de la Terre au Soleil est si grande que ses rayons frappent la surface de la Terre selon un faisceau de droites parallèles. À partir de ce modèle, il aurait calculé la longueur du méridien terrestre.

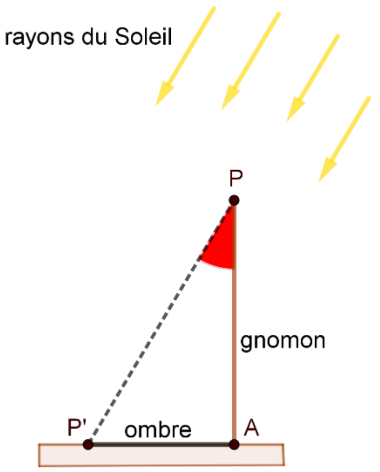
Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « Anaxagore vs Ératosthène ». Cette animation permet de visualiser les deux modèles.

Calcul du méridien terrestre par la méthode attribuée à Ératosthène

Comme Anaxagore, Ératosthène serait parti de la constatation suivante : « *Dans la ville de Syène, à midi le jour du solstice d'été, le soleil éclaire le fond des puits* ».

Syène est approximativement située sur le tropique du Cancer, ce qui explique qu'au solstice d'été, le Soleil est à la verticale du sol. Cela permet aux rayons du soleil d'atteindre le fond des puits.

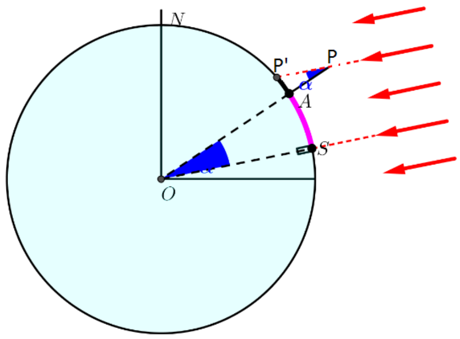
Le même jour à la même heure à Alexandrie, le Soleil n'est pas à la verticale. Ératosthène aurait mesuré l'angle entre les rayons solaires et la verticale : un angle évalué à environ 1/50e d'angle plein (un angle plein est un angle de 360 degrés), soit par une mesure directe avec un goniomètre, soit par une comparaison entre l'ombre d'un gnomon planté verticalement au sol et le gnomon lui-même.



Dans la figure ci-dessus, le gnomon à Alexandrie est représenté par le segment $[AP]$, l'ombre du gnomon par le segment $[AP']$.

Syène et Alexandrie sont approximativement situées sur le même méridien.

Dans la figure ci-dessous, les notations précédentes sont conservées ; le point S correspond à Syène et le point O au centre de la Terre.

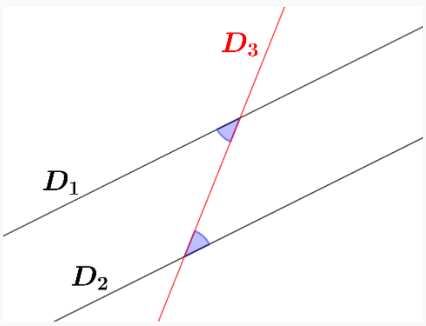


Les rayons du soleil étant parallèles, les droites (PP') et (OS) le sont. Elles forment donc avec la sécante (OP) des angles alternes-internes égaux.

Ainsi, $\widehat{P'PA} = \widehat{AOS} =$ « 1/50e d'angle plein ».

Les angles alternes-internes

Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, alors elles forment avec une sécante D_3 des angles alternes-internes de même mesure.



De plus, les mesures des arcs et les mesures des angles qui les interceptent étant proportionnelles, l'arc AS – distance entre Syène et Alexandrie – mesure 1/50e de la circonférence de la Terre.

Comme Anaxagore, Ératosthène aurait estimé la distance entre Syène et Alexandrie à 5000 stades. On considère ici qu'un stade égyptien correspond à environ 157,5 mètres, même si on en fournit parfois d'autres valeurs (variant de 151,2 m à 158,1 m).

Une valeur approchée de la circonférence de la Terre est alors obtenue en multipliant la distance Syène-Alexandrie par 50 :

$$5\,000 \text{ stades} \times 50 = 250\,000 \text{ stades.}$$

Avec nos unités de mesure, Ératosthène serait parvenu à estimer la circonférence de la Terre à :

$$250\ 000 \times 157{,}5 \text{ m} = 39\ 375\ 000 \text{ m} = 39\ 375 \text{ km}.$$

Hypothèses simplificatrices du modèle

- Le modèle présuppose que les rayons du soleil qui frappent la Terre sont parallèles entre eux, c'est-à-dire que le Soleil est à une distance infinie de la Terre. Il repose également sur l'hypothèse de propagation rectiligne de la lumière depuis le Soleil, ce qui suppose que les milieux traversés sont homogènes. Le modèle néglige le phénomène de réfraction à l'entrée dans l'atmosphère.
- Le modèle présuppose que Syène et Alexandrie sont situées sur le même méridien, ce qui n'est pas tout à fait exact, Syène et Alexandrie ayant respectivement environ 32° et 30° de longitude.
- Le modèle approche l'ombre du gnomon (arc de cercle à la surface de la Terre) par un segment.

En considérant que la Terre a une circonférence de 40 000 kilomètres, l'erreur commise par la méthode dite d'Ératosthène est d'environ 625 kilomètres ; l'erreur relative de cette méthode est donc :

$$\frac{625}{40\ 000} \approx 0{,}0156 \approx 1{,}56\ \% \text{ de la valeur réelle.}$$

L'erreur commise semble exceptionnellement petite compte tenu des hypothèses faites et des mesures approximatives sur lesquelles le calcul est basé. Manifestement, plusieurs imprécisions se compensent pour parvenir à ce résultat.

Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « Expérience d'Ératosthène ». Cette animation permet d'illustrer la méthode attribuée à Ératosthène.

Calcul du méridien par triangulation

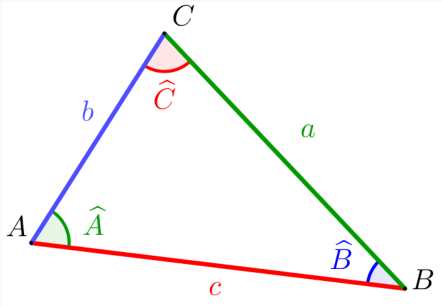
Principe de la triangulation plane

La triangulation plane consiste à « enfermer » une longueur inaccessible à la mesure dans une chaîne de triangles dont on est capable de mesurer les angles et dont la mesure de l'un des côtés est connue. Les calculs effectués par triangulation reposent sur les deux résultats suivants :

- la somme des angles d'un triangle et ;
- la loi des sinus.

Géométrie

Soit ABC un triangle quelconque. La figure ci-dessous précise les notations utilisées pour les longueurs et les angles.



Somme des angles d'un triangle

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$$

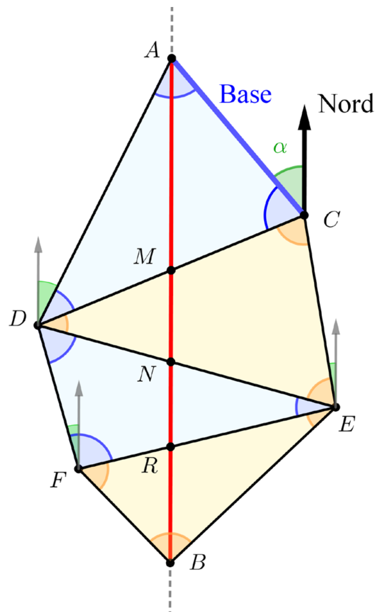
Loi de sinus

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$$

En appliquant ces résultats, à partir des mesures connues de l'un des côtés et de deux angles d'un triangle, on peut calculer les mesures du troisième angle et des deux autres côtés.

Considérons un segment de méridien $[AB]$ dont la longueur est inaccessible par une mesure directe. L'objectif est donc de calculer la longueur de ce segment.

De part et d'autre du segment $[AB]$, on construit autant de triangles que nécessaire. Dans l'exemple ci-dessous, la triangulation s'effectue avec quatre triangles ACD , CDE, DEF et FEB. Les longueurs AM, MN, NR et RB seront calculées à partir de mesures dans ces triangles.

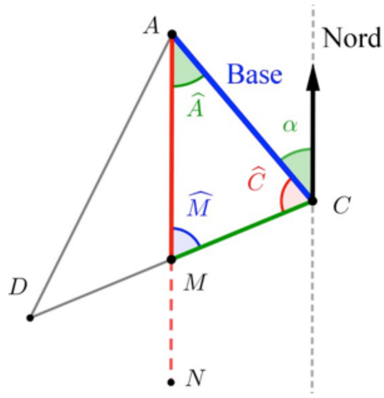


La longueur AB est obtenue en additionnant les quatre longueurs AM, MN, NR et RB :

$$AB = AM + MN + NR + RB.$$

Calcul de la longueur AM

On se place dans le triangle ACM.



Expérimentalement, on peut mesurer au point C :

- l'angle $\hat{C}$, avec le cercle répétiteur, en visant les points A et M ;
- l'angle α entre AC et le Nord avec une boussole.

Le méridien (AM) ayant aussi la direction Nord-Sud, l'angle $\hat{A}$ est égal à α ($\hat{A}$ et α sont alternes-internes).

Or $\hat{A} + \hat{C} + \widehat{M} = 180°$. On en déduit la valeur de l'angle $\widehat{M}$:

$$\widehat{M} = 180° - \hat{A} - \hat{C}.$$

Ainsi, on connaît la longueur AC, et trois angles $\hat{A}$, $\hat{C}$, et $\widehat{M}$.

Sur la figure expliquant le principe de triangulation, la loi des sinus dans le triangle ACM permet le calcul de la longueur AM :

$$AM = AC \times \frac{\sin(\hat{C})}{\sin(\widehat{M})}.$$

Elle permet également le calcul de la longueur CM qui sera utile lors du calcul suivant.

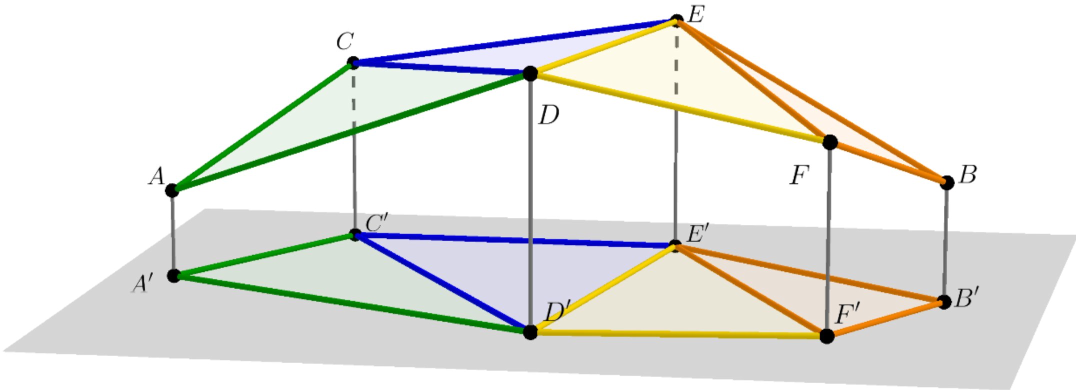
$$CM = AC \times \frac{\sin(\hat{A})}{\sin(\widehat{M})}.$$

On calcule alors la longueur CD, qui va servir de nouvelle base. La loi des sinus dans le triangle ACD le permet :

$$CD = AC \times \frac{\sin(\hat{A})}{\sin(\hat{D}')}.$$

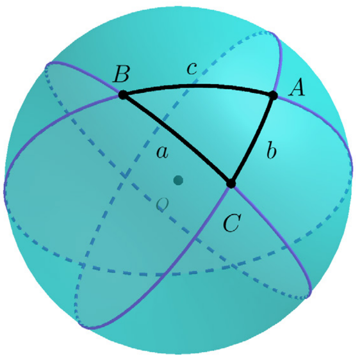
Le calcul des longueurs des autres morceaux de méridien MN, NR et RB s'effectue de proche en proche, en suivant la méthode décrite pour le calcul de AM.

Remarque : Les sommets des triangles visés par Delambre et Méchain n'étant pas situés à la même hauteur (sommets de clochers, sommets de collines ou de tours), les triangles qui ont servi pour les mesures sont en fait « inclinés », alors que la méthode de triangulation s'applique pour des triangles plans. Delambre et Méchain ont dû mesurer l'angle que faisait chaque triangle incliné avec la verticale pour le ramener à l'horizontale.



Hypothèses simplificatrices du modèle

Dans la réalité, les arcs de méridien sont des arcs curvilignes et les triangles considérés sont des triangles sphériques.



Le modèle utilisé dans la triangulation assimile des arcs de cercles à des segments. Pour des longueurs petites par rapport à la distance entre Dunkerque et Barcelone, l'erreur commise est négligeable.

Histoire de la triangulation par Delambre et Méchain

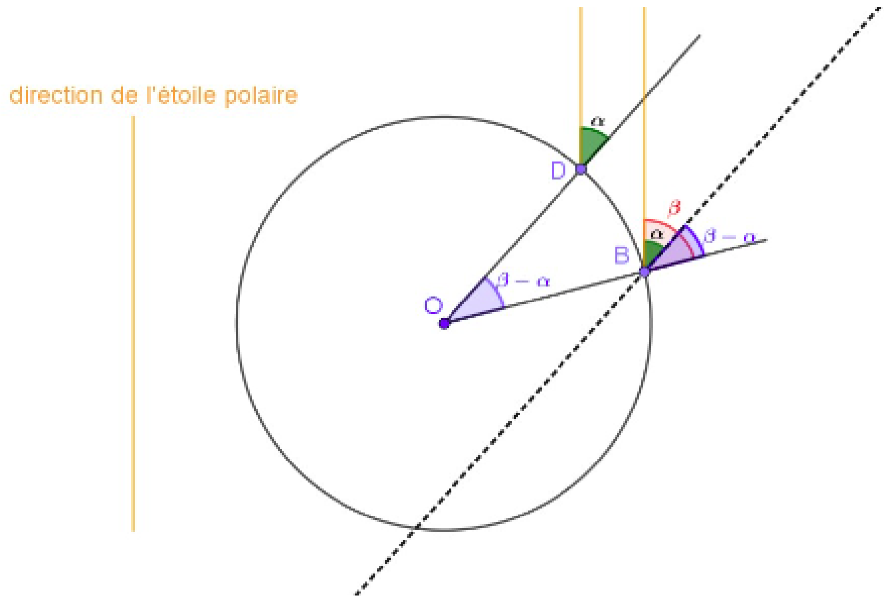
Pour mesurer l'arc du méridien joignant Dunkerque à Barcelone, Delambre et Méchain construisent un enchevêtrement d'une centaine de triangles ayant pour sommets des lieux surélevés : clochers d'églises, sommets de collines, tours… visibles les uns depuis les autres. Les deux savants partent en pleine Révolution pour un périple qui aurait dû s'achever au bout d'un an. L'expédition se prolongera jusqu'en 1798 dans des conditions difficiles. Il faut monter le matériel au haut des clochers, franchir des montagnes, subir les intempéries, la méfiance des habitants et une situation politique agitée. Suscitant incompréhension et hostilité, risquant le froid, la maladie, la prison et la mort, ils parviennent à réaliser la mesure de l'arc au cours d'une des périodes les plus mouvementées de l'histoire. De 1792 à 1793, Delambre, suspecté de complot, a de nombreux démêlés avec des gardes nationaux locaux et ne peut travailler efficacement. Il est même emprisonné et manque d'y perdre la vie.
Peu après son départ, Méchain est arrêté puis relâché, ses instruments de mesures étant jugés suspects. Quand il arrive en Espagne, les repères fiables nécessaires à la mesure des

angles sont difficiles à trouver dans les montagnes pyrénéennes. Il est victime d'un grave accident dans lequel il perd l'usage du bras droit. La guerre entre la France et l'Espagne instaure le régime de la Terreur entre 1793 et 1795 ; elle empêche Méchain de rentrer en France alors qu'il a terminé toutes ses mesures. On lui confisque son matériel et son argent. Savant théoricien, Méchain veut vérifier la justesse de ses calculs. Il se rend compte d'une incohérence dans les résultats. Cette erreur, qu'il gardera secrète, le tourmentera jusqu'à la fin de sa vie et le conduira à la folie. Pour mesurer les angles des différents triangles, Delambre et Méchain ont utilisé le « cercle répétiteur » inventé par Borda et Lenoir dont le principe est de pouvoir répéter autant de fois que l'on veut la même mesure sans revenir à zéro. Delambre et Méchain ont lissé les erreurs de mesures par des calculs de moyennes. Cela a nécessité de répéter certaines visées plus d'une centaine de fois. En revanche, une unique mesure de longueur est nécessaire au départ : celle de la base. Elle a été effectuée à l'aide de règles plates mesurant 12 pieds, soit environ 4 mètres, entre Melun et Lieusaint, deux villes choisies pour être situées dans une région particulièrement plate (l'Ile de France).

La longueur de l'arc de méridien reliant Dunkerque à Barcelone étant déterminée, la connaissance de la différence des latitudes de ces deux villes permet de déterminer la longueur du méridien.

Pour déterminer cet angle, les astronomes ont mesuré les angles α et β entre la verticale (passant par le centre de la Terre) et la direction d'une étoile lointaine, l'étoile polaire par exemple, à Dunkerque et à Barcelone.

La figure ci-dessous illustre ce procédé : le cercle tracé est le méridien passant par Dunkerque (représenté par le point D) et Barcelone (représenté par le point B). Le point O représente le centre de la Terre.



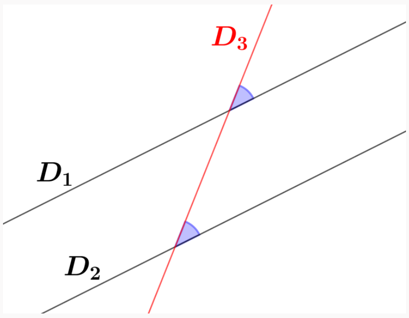
L'angle $\widehat{BOD}$, différence des latitudes entre Dunkerque et Barcelone, a pour mesure $\beta - \alpha$.

Démonstration
α est également la mesure de l'angle de sommet B formé par la parallèle à (OD) passant par B et la direction de l'étoile polaire. Par la relation de Chasles, $\beta - \alpha$ est la mesure de l'angle de sommet B formé par la droite (OB) et la parallèle à (OD) passant par B.

D'après l'égalité des angles correspondants, cet angle est aussi égal à l'angle $\widehat{BOD}$.

Les angles correspondants

Si deux droites D_1 et D_2 sont parallèles, alors elles forment avec une sécante D_3 des angles correspondants de même mesure.



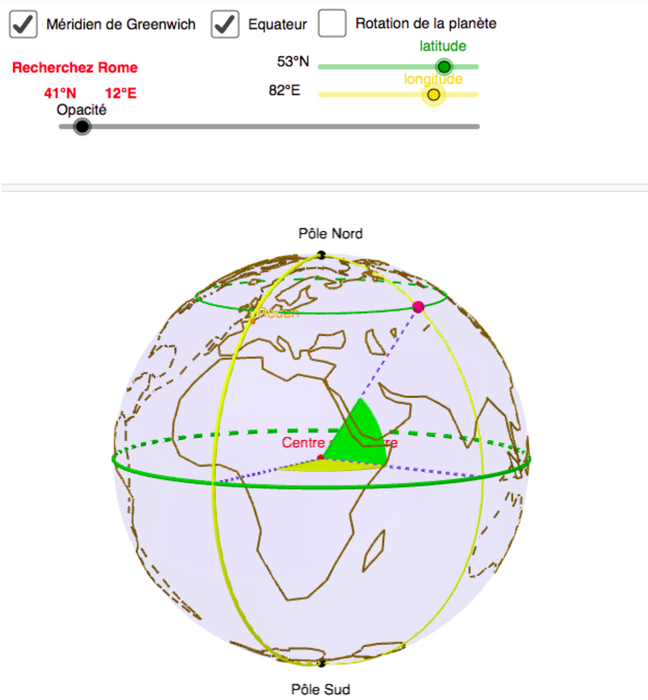
La longueur du quart de méridienne ainsi calculée par Delambre et Méchain est de 5 130 740 toises. La dix-millionième partie de cette longueur a défini le mètre jusqu'en 1983.

Si le mètre correspond au dix-millionième de l'arc de méridien entre le pôle et l'équateur, l'arc en question devrait donc mesurer exactement 10 millions de mètres. Or les dernières mesures par satellite sont formelles : la longueur du méridien entre le pôle et l'équateur mesure 10 002 290 mètres. Il manque donc 0,229 millimètres au mètre de Delambre et Méchain.

Depuis 1983, le mètre n'est plus défini comme étant le quart du dix-millionième du méridien terrestre, mais comme étant la distance parcourue dans le vide par la lumière en 1/299 792 45e de seconde. Cette distance est mesurée au laser.

Repérage et chemins tracés à la surface de la Terre

Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « Revoir latitude et longitude sur Terre ». Cette animation permet de remobiliser le repérage d'un point à la surface de la Terre et les notions de méridien et de parallèle.



Plus court chemin (géodésique)

> **Vocabulaire autour de la sphère**
>
> Considérons deux points A et B sur une sphère de centre O.
>
> **Le grand cercle**
>
> Lorsque deux points A et B ne sont pas diamétralement opposés, les points A, B et O définissent un unique plan. L'intersection de ce plan avec la sphère porte le nom de grand cercle.
>
> **Arc**
>
> Un arc de cercle est une partie de cercle délimitée par deux points.

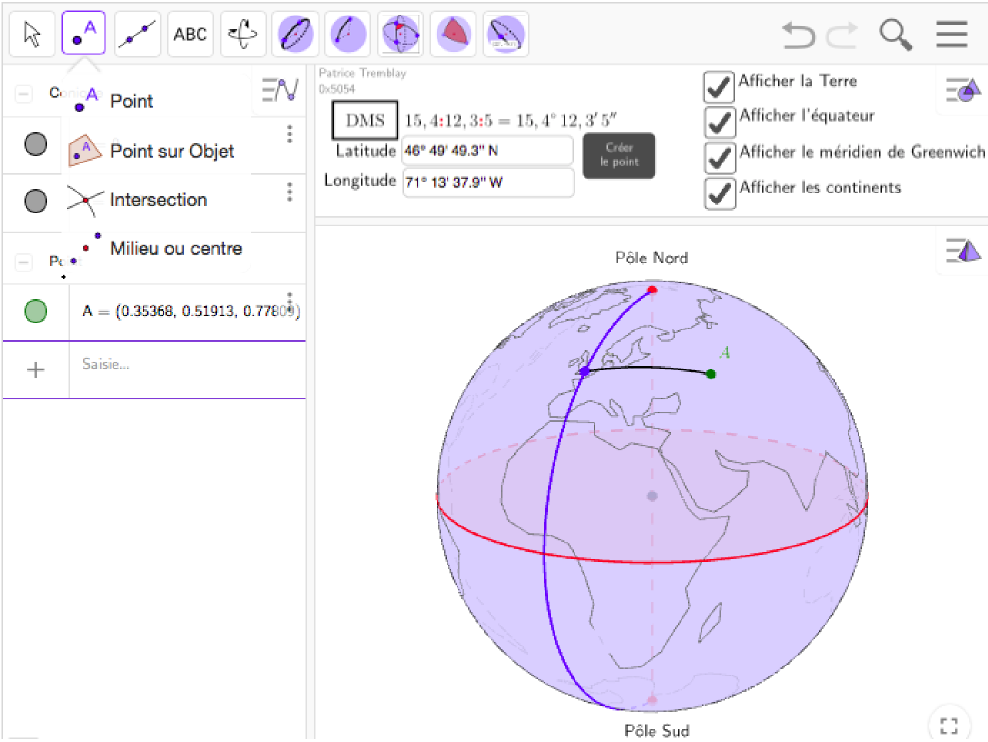
On admet que le plus court chemin à la surface de la Terre reliant deux points A et B est le plus petit des deux arcs du grand cercle passant par A et B. Cette distance est également appelé géodésique.

Lorsque A et B sont diamétralement opposés sur la sphère terrestre, le plus court chemin à la surface de la Terre entre ces deux points a pour mesure celle du demi-méridien. Il est réalisé par une infinité de demi-cercles.

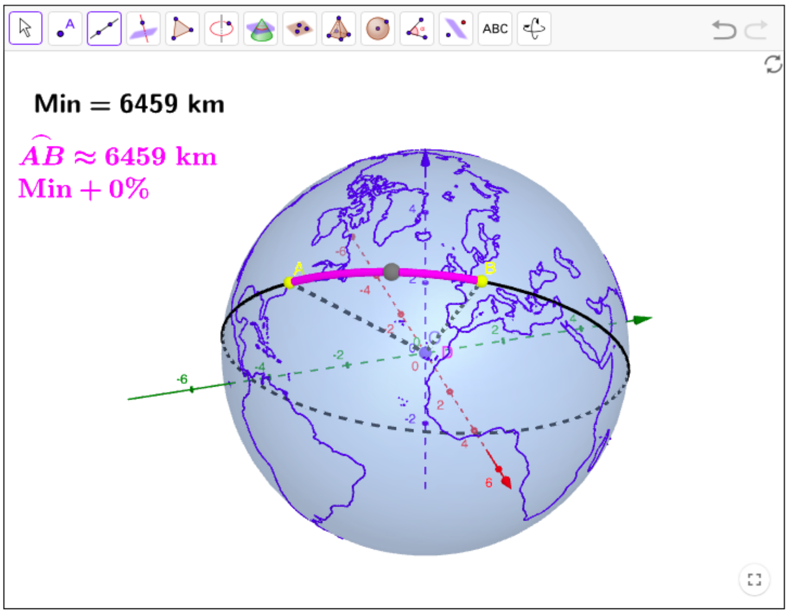
Illustrations

Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « Des constructions à la surface de la Terre ».
Cette animation donne des outils pour :

- construire des points de longitude et latitude données ;
- tracer le grand cercle passant par deux points non diamétralement opposés ;
- tracer des arcs de cercles et mesurer leur longueur ;
- tracer le méridien et le parallèle passant par un point ;
- tracer des triangles sphériques.



Télécharger l'animation Geogebra © intitulée « Chemin le plus court à la surface de la Terre ».
Cette animation permet de conjecturer ou de visualiser le plus court chemin à la surface de la Terre entre deux points à la surface de la Terre.



Retrouvez éduscol sur :

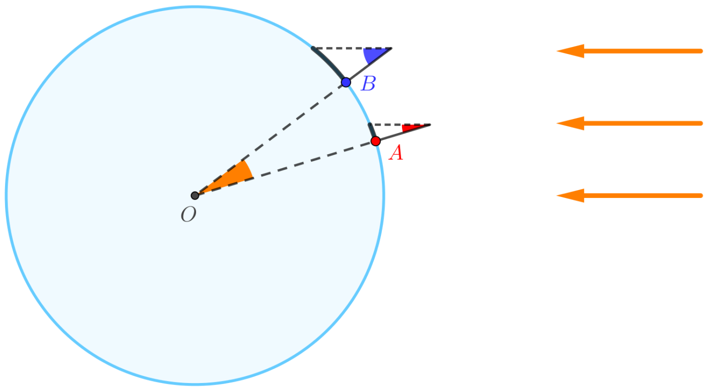
Propositions d'activités

Activité 1 : calcul de la longueur du méridien sans aller en Égypte

Dans deux villes A et B choisies sur un même méridien, planter le même jour à midi au soleil un bâton bien vertical dans le sol.

Pour chacune, à partir de l'ombre formée, calculer les angles au sommet.

Connaissant la distance entre les deux villes, retrouver une valeur approchée de la circonférence de la Terre.

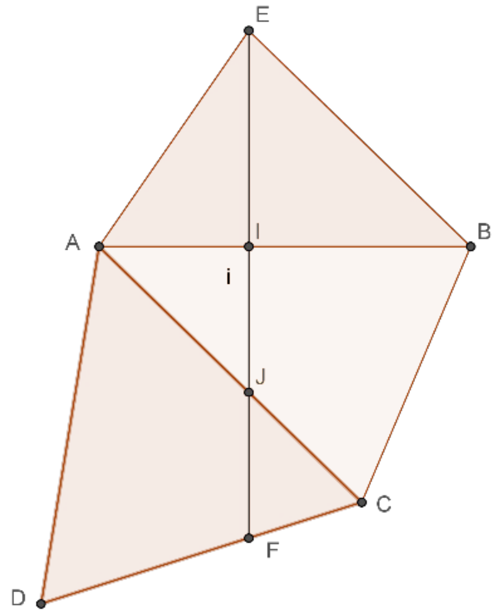


Activité 2 : la rotondité de la Terre (source Hors-Série CLEA Maths et astronomie)

La Terre est supposée sphérique, de 6 370 km de rayon.

1. Un enfant situé au niveau de la mer voit s'éloigner un voilier de 20 m de hauteur. À quelle distance sera le voilier lorsqu'il aura totalement disparu pour la première fois de la vue de l'enfant ?
2. L'enfant décide de monter au sommet d'une colline qui culmine à 300 m au-dessus du niveau de la mer. À quelle distance sera le voilier lorsqu'il aura totalement disparu pour la première fois de la vue de l'enfant ?

Activité 3 : mise en œuvre de la triangulation plane



Le segment $[EF]$ joue ici le rôle de la méridienne Dunkerque-Barcelone. L'objectif est d'en mesurer la longueur.

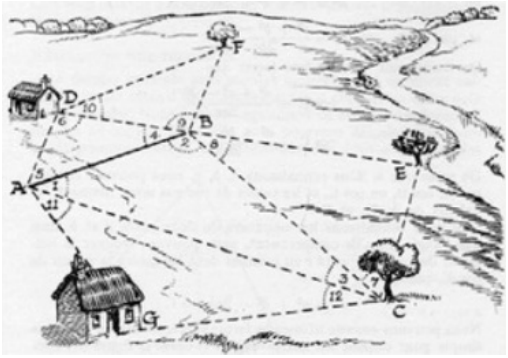
La triangulation comporte ici quatre triangles. Les premières mesures réalisées sont :

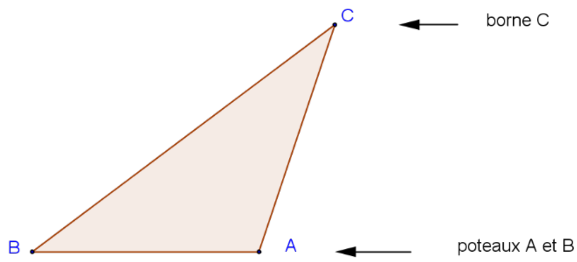
- la base $AB = 7{,}5$ m ;
- les trois mesures d'angles : $\widehat{BAE} = 56°$, $\widehat{AEF} = 30°$ et $\widehat{ABE} = 45°$.

1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$, puis la longueur AE.
2. À présent, dans le triangle AEI, on connait un côté et deux angles. On peut donc le résoudre.
   2.1. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EIA}$ puis la longueur EI qui est le premier « morceau » de la méridienne.
   2.2. Calculer la longueur AI.
3. On mesure ensuite les angles : $\widehat{BAC} = 45°$ et $\widehat{ABC} = 67°$.
   3.1. Calculer $\widehat{ACB}$ et la longueur AC.
   3.2. La résolution du triangle AIJ est possible. Déterminer IJ qui est le deuxième « morceau » de la méridienne.
   3.3. Calculer la longueur AJ.
4. On mesure les angles $\widehat{ADC} = 64°$ et $\widehat{CAD} = 54°$.
   4.1. En résolvant le triangle CJK, déterminer la longueur JK qui est le troisième « morceau » de la méridienne.
   4.2. Calculer la longueur KC.
5. On mesure les angles $\widehat{DCF} = 46°$ et $\widehat{ABC} = 67°$. Calculer la longueur KF, quatrième « morceau » de la méridienne.
6. Calculer la longueur EF de la méridienne.

Activité 4 : triangulation et arpentage d'un terrain

Cette activité est extraite du site de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de la Réunion.





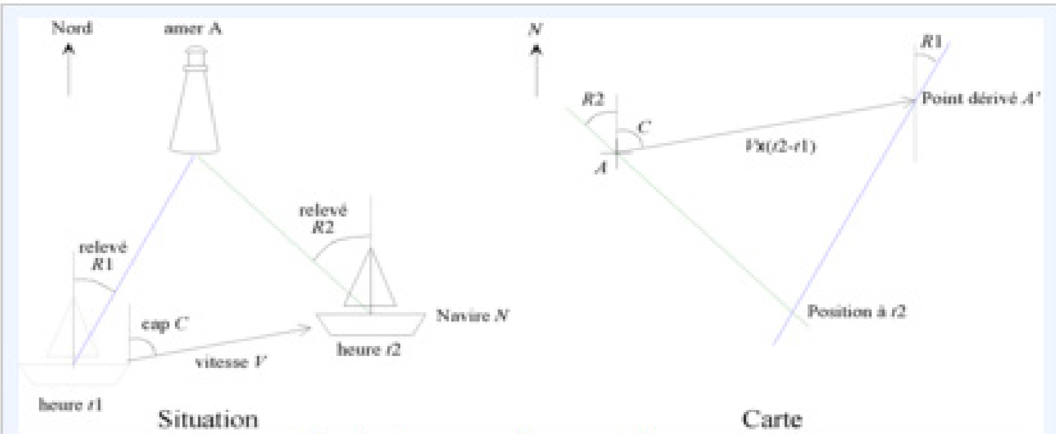
Pour mesurer l'aire d'un triangle, la démarche habituelle (voir figure) consiste à planter deux poteaux aux points A et B et, avec un décamètre ou une chaîne d'arpenteur, à mesurer la distance qui les sépare : c'est la ligne de base. Une lunette d'arpenteur placée en A permet de repérer sa direction (« azimut »). Deux visées successives de la borne C puis du poteau B permettent d'obtenir l'angle $\hat{A}$ du triangle ABC par soustraction des valeurs lues sur le plateau d'azimut. À partir du point B on mesure l'angle $\hat{B}$ de façon analogue.

Un travail analogue peut être mené à partir de plans cadastraux.

Activité 5 : Triangulation et navigation par un amer

Cette activité est extraite du site de l'institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de la Réunion.

Comment se repérer en mer lorsqu'on aperçoit une terre ?



Navigation par relèvement à un amer

D'après le site http://irem.univ-reunion.fr/IMG/png/application2.png

Jusque dans les années 1980, la triangulation était essentiellement utilisée pour mesurer les distances.

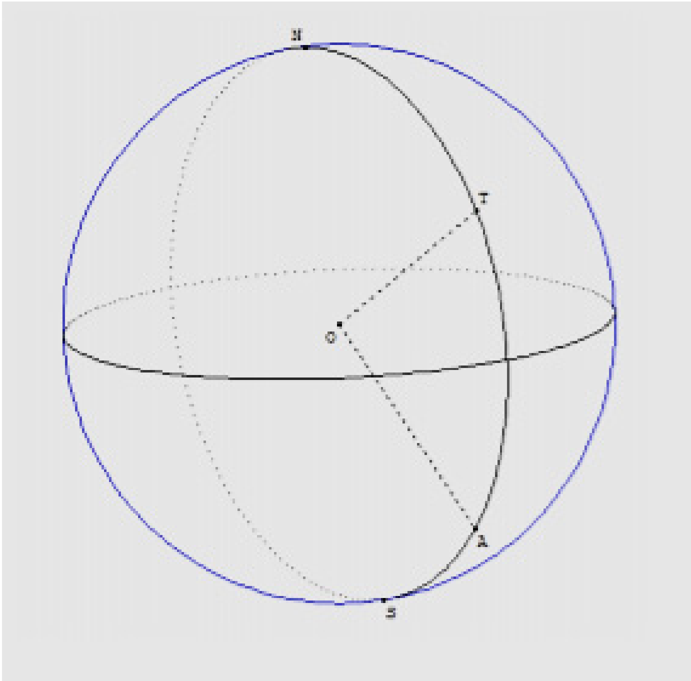
Considérons un navire placé au point B. Le marin voit la lumière émise par un phare situé au point A. Le marin effectue alors un relèvement pour mesurer l'angle fait entre la droite (AB) et le Nord indiqué par une boussole. Il obtient la mesure de l'angle $\widehat{R1}$.

Le bateau dérive à une certaine vitesse connue, il se trouve alors en un point C. Le marin mesure l'angle fait entre la droite (AC) et le Nord, il obtient la mesure de l'angle $\widehat{R2}$.

Le marin se trouve donc dans un triangle ABC dont deux angles et la mesure d'un côté [BC] sont connus. Le procédé de triangulation peut être appliqué pour se repérer en mer.

Activité 6 : longueurs de chemins à la surface de la Terre

1. Plus court chemin entre deux points situés sur un même méridien.



1.1. Trouver les coordonnées géographiques des villes Tokyo et Adélaïde. Justifier que ces deux villes sont situées sur un même méridien.
1.2. Quelle est la longueur du plus court chemin joignant ces deux villes ? Justifier la réponse.

2. Plus court chemin entre deux points situés sur des demi-méridiens opposés.
2.1. Vérifier que les villes de Jakarta et Montréal sont situées sur des demi-méridiens opposés.
2.2. Calculer la longueur du plus court chemin reliant ces deux villes.

3. Chemins entre deux points situés sur un même parallèle et diamétralement opposés.
On donne les coordonnées géographiques des villes d'Anchorage et Saint-Pétersbourg : Anchorage (60° N - 150° O) ; Saint-Pétersbourg (60° N – 30° E).
3.1. Justifier que ces deux villes sont situées sur un même parallèle et qu'elles sont diamétralement opposées sur ce parallèle.
3.2. Calculer la longueur du chemin reliant Anchorage à Saint-Pétersbourg le long de ce parallèle.
3.3. Un avion a le choix entre deux itinéraires : celui qui suit le soixantième parallèle et celui qui passe par le pôle Nord. Indiquer, en justifiant, le meilleur choix pour la compagnie aérienne.

Activité 7 : économie de carburant sur un vol Poitiers-Seattle

Les villes de Seattle et Poitiers sont situées toutes deux sur le parallèle de latitude 47°. On note J le centre de ce parallèle, S la position de Seattle et P celle de Poitiers sur ce parallèle.

1. Calculer le rayon de ce parallèle.
2. Calculer la longueur du plus petit arc du parallèle reliant S à P.
3. Calculer la longueur du chemin reliant Seattle au Pôle Nord en suivant le méridien passant par Seattle.
4. Calculer la longueur du chemin reliant Poitiers au Pôle Nord en suivant le méridien passant par Poitiers.
5. Sur un vol Poitiers-Seattle par un avion consommant 3 L de carburant pour 100 km par passager, quelle serait l'économie de carburant réalisée par une compagnie aérienne optant pour un itinéraire passant par le Pôle Nord plutôt que de suivre le parallèle reliant Poitiers à Seattle ?
6. Déterminer, à l'aide d'un système d'information géographique, le plus court chemin joignant ces deux villes et expliquer les écarts avec les longueurs calculées précédemment.

Bibliographie et sitographie

- Michel Serres, Les origines de la géométrie, Flammarion, 2011.
- Denis Guedj, La méridienne, Points, 2008.
- Denis Guedj, Le Mètre du monde, Points, 2000.
- Denis Guedj, Les cheveux de Bérénice, Points, 2007.
- Site Planet Terre.
- Site de l'université Lille : comment fonctionne un GPS ?
- Site du réseau national de la métrologie française : Le LNE pilote le réseau de la métrologie française, Histoire de la mesure.