LES MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE LES SONS PURS ET COMPOSÉS

Mots-clés

Fréquence, période, harmoniques, fondamentale.

Références au programme

La banalité du son dans l'environnement cache une réalité physique précise.

Savoir

Un son pur est associé à un signal dépendant du temps de façon sinusoïdale.
Un signal périodique de fréquence f se décompose en une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences multiples de f. Le son associé à ce signal est alors appelé son composé.
f est appelée fréquence fondamentale. Les autres fréquences sont appelées harmoniques.
La puissance par unité de surface transportée par une onde sonore est quantifiée par son intensité. Son niveau d'intensité sonore est exprimé en décibels selon une échelle logarithmique.

Savoir-faire

- Utiliser un logiciel permettant de visualiser le spectre d'un son. Utiliser un logiciel pour produire des sons purs et des sons composés.
- Relier puissance sonore par unité de surface et niveau d'intensité sonore exprimé en décibels.

Notions mathématiques mobilisées

- Fonctions sinusoïdales, période, fréquence.
- Fonctions périodiques, période, fréquence.
- Fonction logarithme décimal, échelle logarithmique.

Histoire, enjeux, débats

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien et physicien français, est connu pour avoir déterminé, par le calcul, une solution au problème de la diffusion de la chaleur le long d'une barre métallique. Sa méthode de résolution repose sur la décomposition de la fonction inconnue en somme de fonctions particulières (sinusoïdes). On parle de décomposition en série trigonométrique (ou série de Fourier). Cette méthode très féconde est largement utilisée en dehors du champ qui a servi de cadre à sa découverte puisqu'elle est à la base de la théorie du signal avec des applications majeures pour le traitement et la compression des sons.

Au XXe siècle, les travaux de mathématiciennes et mathématiciens comme Dennis Gabor, Yves Meyer, Ingrid Daubechies ou Stéphane Mallat, ont permis d'étendre la théorie de Fourier à celle des ondelettes. Parmi les applications de cette théorie, on peut citer la compression d'images (format JPEG 2000) ou l'imagerie médicale (imagerie par résonnance magnétique).

Les mathématiques et les sons purs et composés

Un son est provoqué par un mouvement vibratoire de l'air s'accompagnant de compressions et dépressions locales.

Pour visualiser une onde sonore, on peut par exemple représenter le déplacement de la membrane d'un microphone en fonction du temps. On modélise mathématiquement ce déplacement par une fonction dépendant du temps.

Son pur

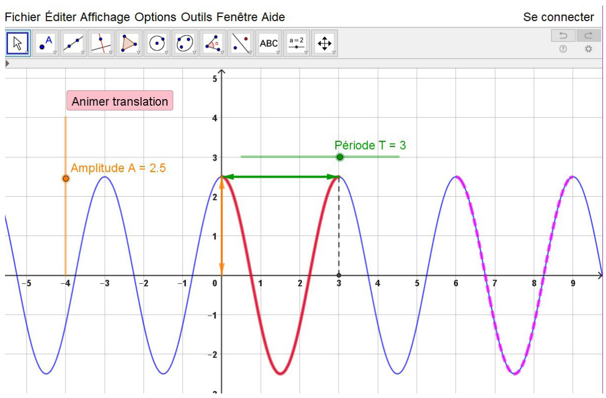
Un son pur, comme le La3 d'un diapason, est modélisé par une fonction appelée sinusoïde.

Il est caractérisé par son intensité et sa fréquence. L'intensité, qui traduit la puissance par unité de surface transportée par l'onde sonore, est reliée à l'amplitude de la sinusoïde.

La fréquence indique le nombre d'oscillations (compressions et dépressions) complètes subies par l'air en une seconde. Elle s'exprime en Hertz, noté Hz, et correspond à un nombre par seconde. La hauteur d'un son pur est la fréquence de l'onde sonore associée. Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu.

L'inverse de la fréquence, qui s'exprime en seconde, s'appelle la période de la sinusoïde. C'est l'intervalle de temps au bout duquel la sinusoïde se reproduit à l'identique.

Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « Sinusoïdes ». Cette animation permet de visualiser les variations l'amplitude et la période d'une sinusoïde.



Retrouvez éduscol sur :

Son composé

Le son correspondant à une note jouée par un instrument de musique n'est pas un son pur, mais le signal sonore s qui lui est associé a la particularité d'être périodique. Cela signifie que la courbe représentative de la fonction s qui la modélise contient un motif qui se répète à l'identique. Mathématiquement, la répétition du motif s'exprime par l'existence d'un nombre T tel que, pour tout temps t, $s(t+T)=s(t)$. La période du signal est définie comme étant le plus petit nombre strictement positif T vérifiant cette propriété.

L'inverse $\frac{1}{T}$ de la période T est la fréquence de l'onde et se note f. Elle s'exprime en Hertz. En étudiant la propagation de la chaleur le long d'une tige métallique, Joseph Fourier démontra que toute fonction périodique s de fréquence f s'écrit comme une somme de fonctions trigonométriques dont les fréquences sont des multiples de f.

Au niveau des sons, cela se traduit de la manière suivante : un son composé (représenté par une fonction périodique) résulte de la combinaison de sons purs (associés à des sinusoïdes) dont les fréquences sont toutes multiples de l'une d'elles, appelée la fréquence fondamentale. La fréquence fondamentale f est perçue par l'oreille comme étant la fréquence du son. C'est pourquoi elle est encore appelée hauteur du son. L'ensemble des fréquences $f, 2f, 3f$… et des amplitudes associées constitue le spectre du son.

La décomposition d'un son composé en somme de sons purs de fréquences multiples de la fréquence fondamentale permet d'expliquer pourquoi certains sons produits simultanément sont agréables à l'oreille ; on dit alors qu'ils sont consonants.

En fait, deux sons « sonnent » bien ensemble si leurs spectres ont beaucoup de fréquences en commun. Prenons l'exemple de deux sons dont le rapport des fréquences fondamentales est égal à 2. On dit que ces deux sons sont à l'octave l'un de l'autre, ou encore que l'intervalle musical qui les sépare est une octave.

C'est le cas du Do3 de fréquence $f = 262$ Hz et du Do4 de fréquence $2f = 524$ Hz.

Les fréquences du spectre de la note la plus grave sont $f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f$…

Les fréquences du spectre de la note la plus aigüe sont $2f, 4f, 6f, 8f$… Elles font toutes parties du spectre de la note la plus grave. Même si elles n'ont pas la même hauteur, ces deux notes sonnent bien ensemble.

Deux sons dont le rapport des fréquences fondamentales est égal à 3/2 sont à la quinte l'un de l'autre. Ils sont consonants car la moitié des fréquences du spectre $3f, 6f, 9f, 12f, 15f, 18f$… du son de fréquence fondamentale $3f$ sont contenues dans le spectre $2f, 4f, 6f, 8f, 10f, 12f, 14f$… du son de fréquence fondamentale $2f$. Les fréquences de ces deux spectres sont d'ailleurs toutes contenues dans celles du spectre du son de fréquence fondamentale f. Cette raison mathématique explique a posteriori pourquoi les Grecs de l'école pythagoricienne relient l'harmonie des sons à celle des nombres.

En revanche des sons de fréquences f et 1,9 f ne sont pas consonants.

Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « Écouter une fréquence et son double ». Cette animation permet de visualiser différents signaux sonores et d'entendre les sons associés.

Niveau d'intensité sonore

La puissance par unité de surface transportée par une onde sonore est quantifiée par son intensité I, exprimée en Watt par m^2 (W. m^{-2}).

Le niveau d'intensité sonore, noté L et exprimé en décibels (dB), associé à l'intensité sonore I est défini par la relation :

$$L = 10.\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

où $I_0 = 10^{-12}$ W.m^{-2} est l'intensité sonore minimale à laquelle l'oreille est sensible pour un son de fréquence 1000 Hz et Log désigne le logarithme décimal.

Le seuil de douleur auditive se situe à un niveau d'intensité sonore compris entre 120 et 130 dB. Les bruits deviennent nocifs à partir d'un niveau d'intensité sonore de 80 à 90 dB

Propositions d'activités

Activité 1

Télécharger l'animation GeoGebra © intitulée « Écouter une fréquence et son double ».

Utiliser l'animation pour :

- créer et représenter des sons purs et des sons composés, les écouter ;
- modifier un son pur en jouant sur sa fréquence, son intensité.

Activité 2

1. Calculer le niveau d'intensité sonore correspondant à une intensité sonore de 10^{-5} W. m^{-2}.
2. Quel est l'effet sur l'intensité sonore d'une augmentation du niveau sonore de 10 dB ?
3. Une scie produit une intensité sonore $I = 5\times10^{-4}$ W.m^{-2} à une distance de 10 m. Calculer le niveau L d'intensité sonore correspondant.
4. On estime à 70 dB le niveau d'intensité sonore produit par un violon situé à 5 m de l'auditeur. En admettant que les intensités sonores des différents instruments s'ajoutent, calculer le niveau sonore produit par un orchestre de 16 premiers violons et 14 seconds violons. On fait l'hypothèse que tous ces violons sont situés à 5 m de l'auditeur.
5. Le niveau d'intensité sonore d'un concert de rock est estimé à 100 dB. Calculer l'intensité sonore correspondante.
6. On estime que l'exposition à une intensité sonore $I = 1{,}0\times10^{-1}$ W.m^{-2} peut endommager l'oreille. Interpréter cette donnée dans le contexte d'un concert donné par un orchestre de 30 violons, puis dans celui d'un concert de rock.

Intentions pédagogiques : aucune construction de la fonction logarithme décimal n'est attendue et on recourt à la calculatrice pour calculer ses valeurs ainsi que celles de sa fonction réciproque $x \mapsto 10^x$. Les propriétés de la fonction logarithme utiles pour traiter des problèmes liés à l'intensité sonore sont limitées à celles indiquées ci-dessous.

Propriétés de la fonction logarithme décimal

Soient a et b deux réels strictement positifs, alors :

$\text{Log}\,(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b)$;

$\text{Log}\,\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log}\,(a) - \text{Log}(b)$.

$\text{Log}\,(10^n) = n$, pour tout entier relatif n étendue à $\text{Log}(10^x) = x$ pour tout nombre réel x.

Cette dernière propriété justifie le choix d'une échelle logarithmique pour représenter des intensités sonores dont les ordres de grandeurs sont très différents.