THÈME 2
SOUS-THÈME 2-3
OPTIMISATION DU TRANSPORT DE L'ÉLECTRICITÉ

Mots-clés

Réseau, électricité, optimisation, effet Joule, transport, graphes.

Références au programme

La minimisation des pertes par effet Joule dans la distribution d'électricité le long d'un réseau entre dans le cadre général des problèmes mathématiques de transport et d'optimisation sous contraintes. Ces problèmes, très difficiles à résoudre car non linéaires, nécessitent des traitements numériques lorsqu'ils mettent en jeu un nombre important d'inconnues ou de données.

Présentés ici dans le cadre du transport d'électricité, les graphes sont des modèles mathématiques utilisés pour traiter des problèmes relevant de domaines variés : transport d'information dans un réseau informatique, réseaux sociaux, transactions financières, analyses génétiques, etc.

Savoirs

L'utilisation de la haute tension dans les lignes électriques limite les pertes par effet Joule, à puissance transportée fixée.

Un réseau de transport électrique peut être modélisé mathématiquement par un graphe orienté dont les arcs représentent les lignes électriques et dont les sommets représentent les sources distributrices, les nœuds intermédiaires et les cibles destinatrices.

Dans ce modèle, l'objectif est de minimiser les pertes par effet Joule sur l'ensemble du réseau sous les contraintes suivantes :

- l'intensité totale sortant d'une source est limitée par la puissance maximale distribuée ;
- l'intensité totale entrant dans chaque nœud intermédiaire est égale à l'intensité totale qui en sort ;
- l'intensité totale arrivant à chaque cible est imposée par la puissance qui y est utilisée.

Savoir-faire

Utiliser les formules littérales reliant la puissance à la résistance, l'intensité et la tension pour identifier l'influence de ces grandeurs sur l'effet Joule.

Modéliser un réseau de distribution électrique simple par un graphe orienté.

Exprimer mathématiquement les contraintes et la fonction à minimiser.

Sur l'exemple d'un réseau comprenant uniquement deux sources, un nœud intermédiaire et deux cibles, formuler le problème de minimisation des pertes par effet Joule et le résoudre pour différentes valeurs numériques correspondant aux productions des sources et aux besoins des cibles.

Notions mathématiques travaillées

- Présentation de la notion de graphe : sommet, arête.
- Présentation de l'optimisation sous contraintes.
- Calcul littéral, utilisation de formules.
- Fonction polynôme du second degré.
- Inégalités.
- Sens de variation d'une fonction, extremum.

Histoire, enjeux, débats

La distribution d'électricité est un service public à la frontière des champs politiques, économiques et sociaux avec ses acteurs institutionnels ou privés, ses représentations positives ou négatives. Vue comme une énergie propre comparée aux énergies fossiles, en particulier lorsqu'elle est utilisée pour des véhicules automobiles, l'énergie électrique est encore essentiellement produite en France grâce aux centrales nucléaires qui ont été développées à la fin du XXe siècle après la crise pétrolière. Bien qu'ayant de nombreux avantages, la production d'électricité d'origine nucléaire présente aussi des risques (catastrophes de Tchernobyl ou de Fukushima). La France a choisi de varier ses sources de production d'électricité en intégrant une part croissante de sources d'énergie dites renouvelables. L'électricité renouvelable couvre maintenant un quart de la consommation électrique de la France métropolitaine (hydroélectricité, éolien, solaire photovoltaïque, bioénergies). L'utilisation de l'électricité comme source d'énergie pose à la fois le problème du stockage et du transport. Le transport sur de longues distances (plus de 100 000 km de lignes électriques en France métropolitaine) engendre des pertes en ligne, estimées à 2,16 %. L'utilisation de lignes à haute tension est une réponse pour réduire les pertes d'énergie par effet Joule lors du transport.

Parmi les débats de nature sociale en lien avec le thème, on peut évoquer les nuisances et dangers des installations électriques (pylônes, éoliennes…).

Comme d'autres réseaux (réseaux routiers, réseaux sociaux, réseaux d'ordinateurs, réseaux de neurones, réseau du web…), les réseaux électriques peuvent être modélisés par des graphes. La théorie des graphes est née de l'étude, par Leonhard Euler en 1736, du célèbre problème des sept ponts de Königsberg. C'est un exemple de théorie qui trouve des applications, plusieurs siècles après son invention, dans des domaines éloignés du contexte qui lui a donné naissance. Les graphes font toujours l'objet de recherches en mathématiques et en informatique.

Les mathématiques et le transport d'électricité

Intérêt des lignes à haute tension

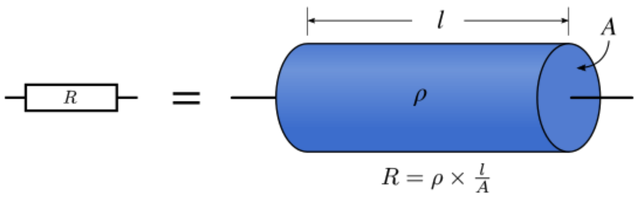
La tension de l'électricité domestique est de 230 volts. On pourrait croire qu'elle est constante d'un bout à l'autre du réseau électrique, mais ce n'est pas le cas. À quelques kilomètres du compteur domestique, la tension n'est pas de 230 volts mais de l'ordre de 20 000 volts.

Si les câbles étaient idéaux, la puissance électrique produite par le générateur serait transmise au récepteur en maintenant une tension de 230 volts d'un bout à l'autre de la ligne. En réalité, les câbles fonctionnent comme des résistances et dissipent par effet Joule une partie de l'énergie destinée au récepteur. L'objectif est de réduire cette perte d'énergie.

La puissance perdue par effet Joule dépend de l'intensité i du courant et de la résistance R du câble, puisqu'elle est donnée par l'expression Ri^2. Pour diminuer la perte par effet Joule, on peut donc diminuer la résistance ou l'intensité du courant.

Baisse de la résistance

La résistance dépend de la longueur l du câble, de l'aire A de sa section et de sa résistivité ρ (résistance par unité de section et de longueur). On a : $R = \rho \times \frac{l}{A}$.



La longueur du câble étant fixée par les contraintes du réseau, pour diminuer sa résistance, on peut diminuer sa résistivité ou augmenter l'aire de sa section.

En pratique, la résistivité du câble est déterminée par le matériau utilisé, le cuivre ; on diminue donc la résistance du câble en augmentant l'aire de sa section, et donc son rayon ($A = \pi r^2$). Mais cette augmentation ne peut se faire que dans une certaine limite, afin de limiter le poids des câbles.

Il n'est donc pas simple de réduire la résistance du câble.

Baisse de l'intensité du courant

La puissance transportée est $P = UI$. La puissance étant constante, pour réduire l'intensité, il faut augmenter la tension. C'est pourquoi on utilise des lignes à haute tension.

La puissance dissipée par effet Joule est égal à RI^2, il est donc bien plus efficace de réduire l'intensité que de réduire la résistance. Ainsi, en divisant l'intensité par 2, on divise par 4 la puissance due à l'effet Joule, alors qu'en divisant par 2 la résistance, on divise seulement par 2 l'effet Joule.

D'après le site RTE (réseau transport d'électricité) les pertes sur les réseaux en France s'élèvent, en moyenne, à 2,5 % par an, ce qui représente une énergie d'environ 11,5 TWh (TeraWatt-heure).

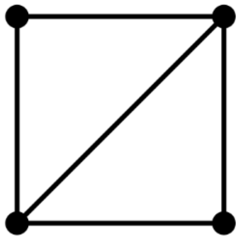
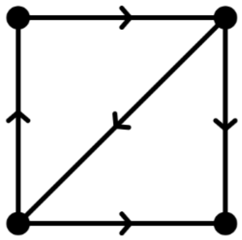
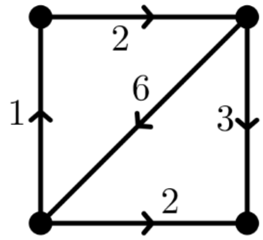
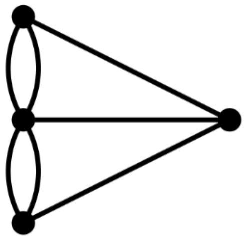
Les lignes à haute tension posent des questions de sécurité mais, si on divisait la tension par deux, les pertes par effet Joule atteindraient 10 % de la production.

Graphes et réseaux électriques

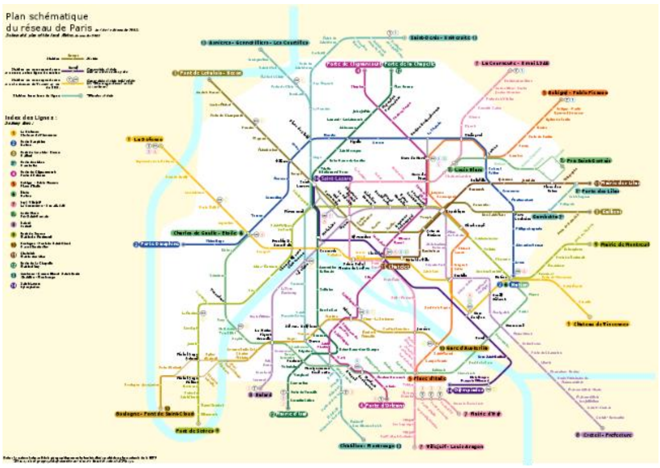
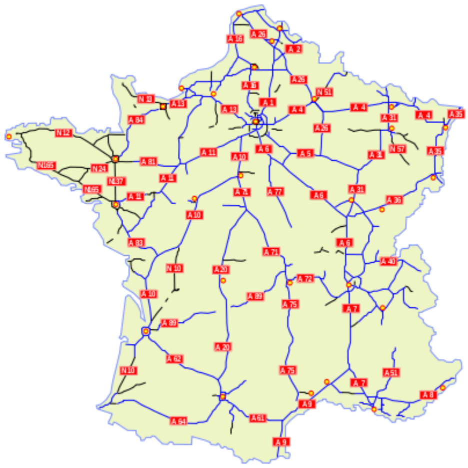
Un graphe non orienté est constitué d'un ensemble de points, appelés nœuds, et d'un ensemble de paires de nœuds distincts appelés arêtes.

Un graphe orienté est constitué d'un ensemble de points, appelés nœuds, et d'un ensemble de couples de nœuds distincts appelés arcs. Les arcs sont alors représentés par des flèches.

Un graphe, orienté ou non peut être pondéré par des valeurs numériques affectées à ses arêtes ou à ses arcs.

			
Un graphe à quatre nœuds et cinq arêtes.	Un graphe orienté à cinq arcs.	Un graphe orienté et pondéré.	Le graphe du problème des 7 ponts de Königsberg (Euler).

Dans le cas d'un graphe pondéré, la valeur numérique associée à une arête (poids) peut être la distance entre ses deux extrémités ou le coût pour aller de l'une à l'autre. De nombreux problèmes d'optimisation sur les graphes ont été étudiés, l'un des plus connus étant celui du voyageur de commerce : comment relier un certain nombre de villes en minimisant le coût total du transport ? Ce problème (*Traveling Salesman Problem* (TSP) en anglais) est encore un domaine actif de recherche et il existe seulement des algorithmes imparfaits qui ne trouvent pas toujours le meilleur chemin.

	
Graphe d'amis dans un réseau social.	Réseau de neurones
	
Réseau du métro parisien	Réseau autoroutier français

Un réseau électrique peut être modélisé par un graphe pondéré et orienté. Les sommets du graphe représentent les sources (générateur d'électricité), les cibles (récepteurs) et un certain nombre de nœuds intermédiaires. Les arêtes du graphe représentent les lignes électriques, elles sont pondérées par l'intensité du courant électrique dans le câble et orientées par le sens du courant (des sources vers les cibles).

La répartition des courants dans le réseau doit satisfaire plusieurs contraintes :

- l'intensité sortant d'une source ne peut dépasser sa capacité de production ;
- l'intensité totale entrant dans chaque nœud doit être égale à l'intensité qui en sort (c'est la loi des nœuds) ;
- l'intensité arrivant à chaque cible est fixée par ses besoins en énergie électrique.

Optimisation sous contraintes

On parle d'optimisation sous contraintes lorsqu'on veut optimiser une fonction dépendant de plusieurs paramètres qui vérifient des inégalités ou qui sont reliés entre eux par des égalités. Les problèmes d'optimisation sous contraintes sont fréquents dans les problèmes d'ingénierie et sont en général assez complexes.

Premier exemple de mise en équation d'un problème d'optimisation

Trois centrales assurent l'alimentation en électricité de quatre villes. L'énergie électrique susceptible d'être produite par chacune des centrales est limitée par une valeur seuil, le besoin électrique de chaque ville correspond à une puissance donnée. Le coût de transport d'un Giga Watt-heure depuis une centrale donnée jusqu'à une ville donnée est également donné. La situation est résumée par le tableau suivant :

	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4	Énergie maximale fournie par la centrale (GWh)
Centrale 1	**8**	**6**	**10**	**9**	35
Centrale 2	**9**	**12**	**13**	**7**	50
Centrale 3	**14**	**9**	**16**	**5**	40
Demande (GWh)	45	20	30	30	

Les nombres figurant en gras au centre du tableau correspondent aux coûts c_{ij} en euro pour produire et transporter 1 GWh de la centrale i à la ville j. Par exemple $c_{23} = 13$ signifie que le coût de transport d'1 GWh de la centrale 2 à la ville 3 s'élève à 13 euros.

Si on note x_{ij} l'énergie (en GWh) produite par la centrale i et destinée à la ville j, les contraintes du problème se traduisent par les équations et inéquations suivantes :

Contraintes de production (offre) :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

Contraintes de consommation (demande) :

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

Le problème consiste à minimiser sous ces contraintes le coût total de distribution, qui est la somme des $c_{ij}x_{ij}$:

$$8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9\,x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

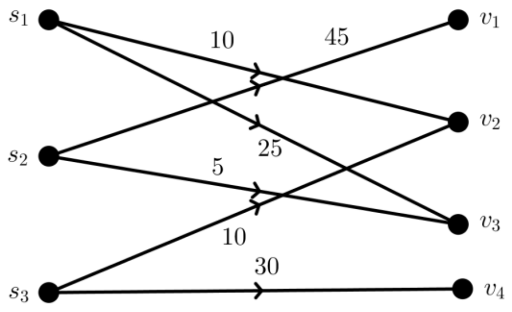
Il s'agit d'une fonction linéaire de 12 variables.

Les attentes du programme se limitent à la mise en équations et la représentation du problème.

On peut cependant mentionner qu'il existe un algorithme (l'algorithme du simplexe) permettant de résoudre ce problème et de fournir les valeurs des x_{ij} correspondant à un coût de distribution minimal. Ces valeurs figurent dans le tableau suivant et correspondent à la répartition suivante :

x_{ij}	Ville 1	Ville 2	Ville 3	Ville 4	Énergie fournie par les centrales (GWh)
Centrale 1	0	10	25	0	35
Centrale 2	45	0	5	0	50
Centrale 3	0	10	0	30	40
Demande (GWh)	45	20	30	30	

On peut représenter la solution par le graphe orienté pondéré suivant :



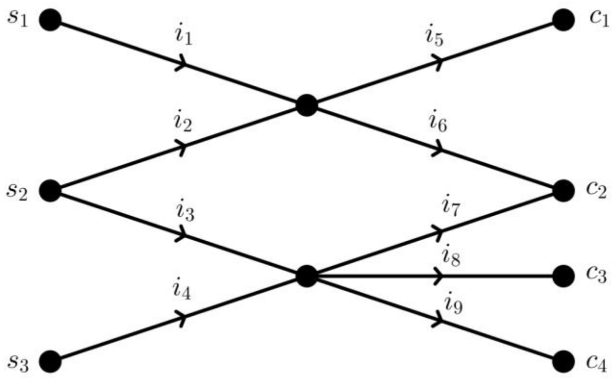
Pour cette répartition optimale, le coût de distribution est de 1200 €.

Même si, de manière générale, la résolution de tels problèmes n'est pas accessible aux élèves de lycée, ils doivent savoir transcrire sous forme d'équations et d'inéquations les différentes contraintes dans le cadre d'un graphe simple modélisant un circuit électrique comme dans l'exemple ci-dessous.

Second exemple de mise en équation d'un problème d'optimisation

Dans l'exemple ci-dessous, les variables sont des intensités de courant.

On a représenté un circuit électrique comprenant trois sources (à gauche) quatre cibles (à droite) et deux nœuds. Traduire les différentes contraintes par des égalités et des inégalités.



Contraintes de production : $i_1 \leq s_1$, $i_2 + i_3 \leq s_2$ et $i_4 \leq s_3$

Loi d'additivité des intensités : $i_1 + i_2 = i_5 + i_6$ et $i_3 + i_4 = i_7 + i_8 + i_9$

Besoins des cibles : $i_5 = c_1$, $i_6 + i_7 = c_2$, $i_8 = c_3$ et $i_9 = c_4$.

La situation au programme

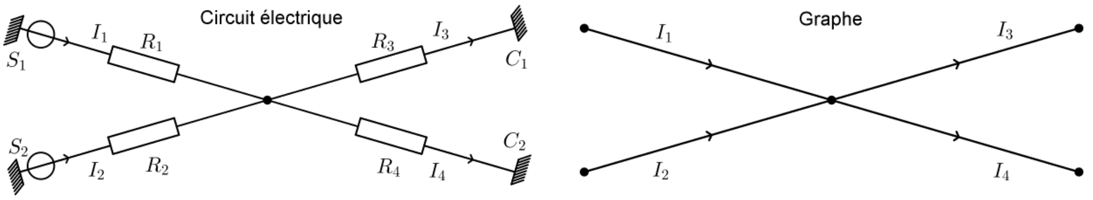
Avec des câbles idéaux, l'électricité serait transmise sans perte des sources aux cibles. En réalité, chaque ligne électrique possède une résistance propre (on fait l'hypothèse que le câble se comporte comme une simple résistance). La résistance du câble entraîne une chute de tension et des pertes d'énergie par effet joule. Pour chaque ligne électrique la puissance perdue par effet joule est $P_J = Ri^2$, où R est la résistance du câble et i l'intensité du courant qui le traverse.

Les capacités de production des sources, les besoins des cibles et la résistance des câbles étant fixés, on cherche à minimiser les pertes par effet joule sur l'ensemble du réseau. Il s'agit d'un problème non linéaire et mettant en jeu plusieurs variables. Par ailleurs, le courant distribué est du courant alternatif. Ce cadre dépasse très largement les capacités attendues à ce niveau.

Afin de traiter intégralement un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes, le choix a été fait d'étudier un modèle très simple et non réaliste (ce que l'on appelle un cas d'école). Une des simplifications du modèle consiste à considérer que l'intensité délivrée par les sources est constante au cours du temps, alors qu'en réalité elle est alternative.

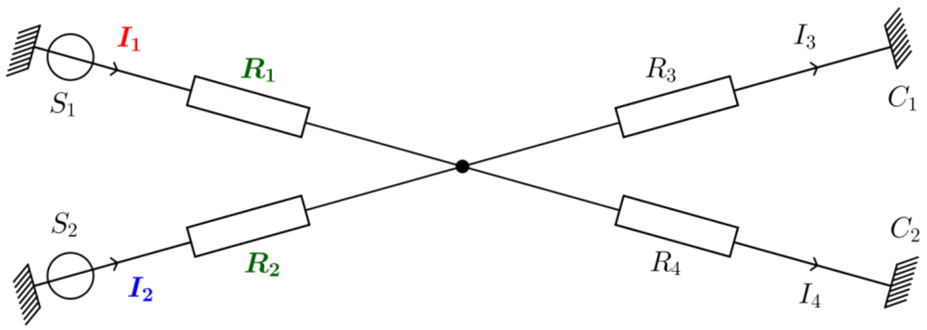
On dispose de deux sources S_1 et S_2 (par exemple des panneaux solaires) qui produisent du courant continu d'intensités I_1 et I_2. Le courant doit être acheminé vers deux cibles C_1 et C_2 qui attendent des intensités fixées valant respectivement $I_3 = a$ et $I_4 = b$. Le réseau comporte un unique nœud comme présenté sur le circuit électrique suivant.

Le modèle mathématique est celui d'un graphe orienté.



Le fichier GeoGebra © intitulé « Circuit électrique vs Graphe » permet de visualiser ces deux représentations.

Le problème consiste à déterminer les intensités I_1et I_2(en Ampère) de sorte que la puissance dissipée par effet Joule (en Watt) le long du réseau soit la plus faible possible.



Notons P la puissance dissipée par effet Joule, on a :

$$P = R_1.I_1^2 + R_2.I_2^2 + R_3.I_3^2 + R_4.I_4^2 = \sum_{k=1}^{4} R_k.I_k^2$$

Les contraintes

D'après la loi des nœuds, $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ et, comme I_3 et I_4 sont constantes, $I_1 + I_2$ est constant. Notons K la somme constante des intensités $I_1 + I_2$. On a aussi supposé R_3 et R_4 constantes donc le terme $R_3.I_3^2 + R_4.I_4^2$ est constant, notons c cette constante.

Par ailleurs, les intensité I_1 et I_2 sont majorées par des valeurs seuils s_1 et s_2 (qui correspondent dans la réalité à des puissances maximales produites par les sources).

- $I_1 \leq s_1$;
- $I_2 \leq s_2$;
- $I_1 + I_2 = K$, où K est la constante $I_3 + I_4$.

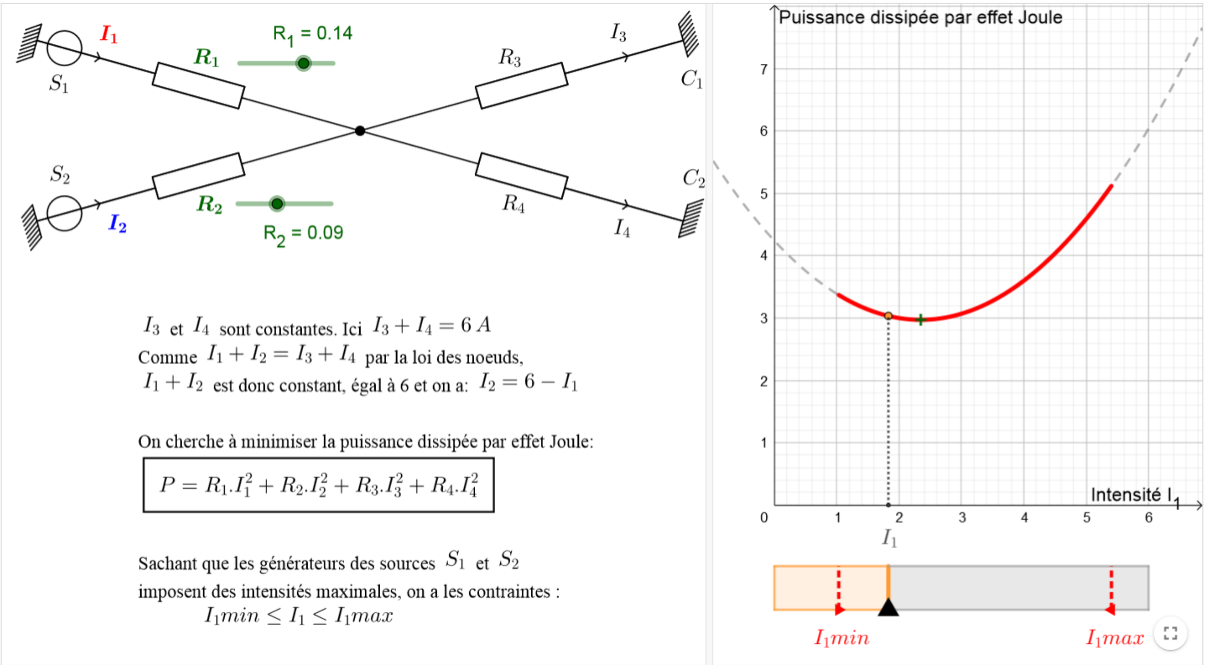
En remplaçant I_2 par $K - I_1$ dans la deuxième contrainte, on déduit que $I_1 \geq K - s_2$. Ainsi l'intensité I_1 est contrainte à varier dans l'intervalle $[\,K - s_2\,,\,s_1]$. Si on note plus simplement $I_1min = K - s_2$ et $I_1max = s_1$.

On a donc la contrainte suivante pour I_1 :

$$I_1\,min \leq I_1 \leq I_1max$$

Expérimentation

À l'aide de l'appliquette GeoGebra © intitulée « Minimisation des pertes par effet Joule », on fait varier les valeurs de R_1 et R_2 pour observer les différents cas de figure.



Minimisation des pertes par effet Joule

On doit minimer la puissance totale dissipée par effet Joule dans le circuit, c'est à dire :

$$P = R_1.I_1^2 + R_2.I_2^2 + R_3.I_3^2 + R_4.I_4^2$$

Rappel des notations pour les trois constantes K, c, et $I_1\text{min}$:

- $K = I_3 + I_4 = I_1 + I_2$
- $c = R_3.I_3^2 + R_4.I_4^2$
- $I_1\text{min} = K - s_2$

On doit minimiser la fonction E de variable I_1 sur l'intervalle $[I_1\text{min}\,; I_1\text{max}]$. La fonction E dépend des paramètres R_1, R_2, c et K et est donnée par l'expression :

$$P = R_1.I_1^2 + R_2.(K - I_1)^2 + c$$

Mathématiquement, le problème consiste à déterminer la (ou les) valeur(s) de I_1 dans l'intervalle $[I_1\text{min}\,; I_1 max]$ qui rendent P minimale. La fonction P est un polynôme du second degré en I_1.

Tous les élèves connaissent depuis la classe de Seconde la fonction carré. Les élèves ayant suivi la spécialité mathématiques en classe de première ont étudié les fonctions polynômes du second degré et leur mise sous forme canonique ainsi que la dérivation. Ils savent donc déterminer l'abscisse du sommet de la parabole représentative d'une telle fonction. Ce problème d'optimisation permet donc de différencier les approches selon les parcours des élèves.

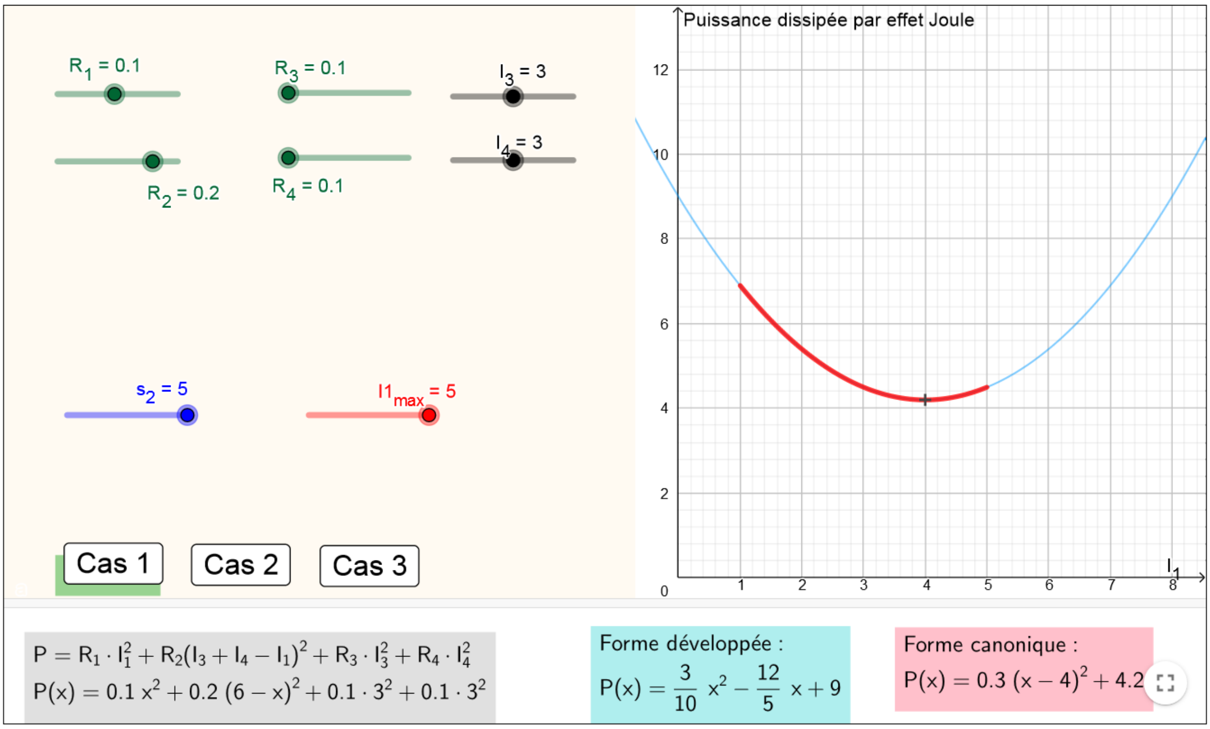
Cas d'études possibles

On propose ci-dessous d'étudier les trois cas de figure correspondant à des valeurs simples que l'on pourra utiliser avec les élèves selon des modalités pédagogiques différenciées. Les trois cas proposés figurent dans le document GeoGebra © intitulé « Étude de trois exemples ». Tous les paramètres sont obtenus en cliquant sur l'un des trois boutons et différentes expressions de la puissance dissipée sont aussi affichées. Le premier exemple propose différentes modalités de résolution du problème.

Les intensités sont exprimées en ampère et les puissances en watt.

Cas n° 1

Dans ce premier exemple, le minimum global est dans l'intervalle des contraintes pour I_1.



Les contraintes

On a donc $K = I_3 + I_4 = 6$ et donc $I_2 = 6 - I_1$. Comme I_2 est inférieur à s_2 qui vaut 5 A on a donc :

$6 - I_1 \leq 5$ et donc $I_1 \geq 1$. Ainsi I_1 varie dans l'intervalle $[1\,;5]$.

La puissance à minimiser

La puissance dissipée par effet Joule est (en Joule) : $P = R_1.I_1^2 + R_2.I_2^2 + R_3.I_3^2 + R_4.I_4^2$

Soit $P = 0{,}1.I_1^2 + 0{,}2.(6 - I_1)^2 + 0{,}1 \times 3^2 + 0{,}1 \times 3^2$

Ce qui, après développement, s'écrit $P = 0{,}3\,I_1^2 - 2{,}4\,I_1 + 9$

On doit déterminer la valeur de I_1 minimisant cette puissance sur l'intervalle $[1\,;5]$.

Optimisation

Plusieurs possibilités selon les connaissances des élèves sur les fonctions du second degré.

- Après avoir conjecturé, soit en manipulant l'applet GeoGebra © intitulée « Étude de trois exemples », soit en traçant la courbe d'équation $P = 0{,}3{I_1}^2 - 2{,}4\,I_1 + 9$ sur la calculatrice, que P semblait avoir un minimum de 4,2 atteint en 4, on peut le prouver en démontrant que, pour toutes valeurs de I_1 dans l'intervalle $[1\,;5]$, $P - 4{,}2 \geq 0$.
  En effet, $0{,}3{I_1}^2 - 2{,}4\,I_1 + 4{,}8 = 0{,}3(I_1 - 4)^2$

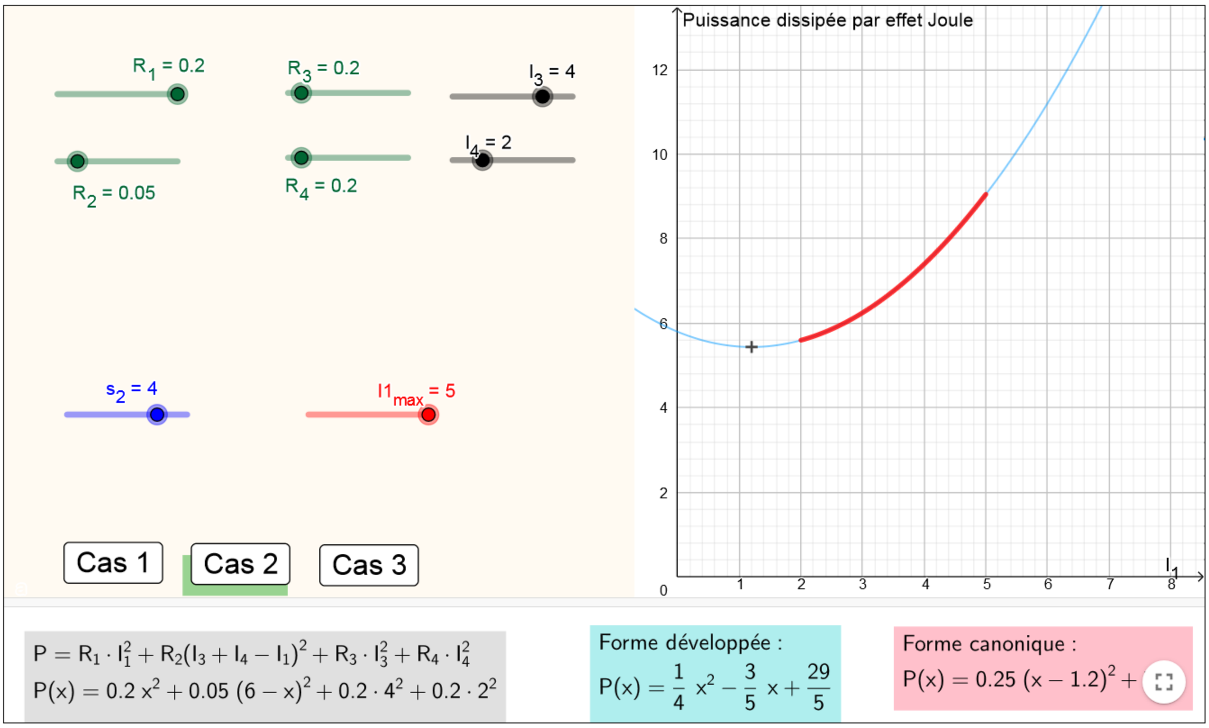
- On peut utiliser la forme canonique de P, qui s'écrit $P = 0{,}3(I_1 - 4)^2 + 4{,}2$. Cette expression de P sous forme canonique peut être donnée ou obtenue par le calcul formel, par exemple avec la fonction FormeCanonique() de GeoGebra ©.

- La dérivée de P par rapport à I_1, égale $0{,}6\ I_1 - 2{,}4$ est négative lorsque I_1 est inférieure à 4 et positive lorsque I_1 est supérieure à 4, donc P admet un minimum pour $I_1 = 4$ qui est bien dans l'intervalle considéré.

Chacune de ces méthodes permettent de montrer que E admet un minimum en 4. Cela correspond à un courant I_1 d'intensité 4 A et un courant I_2 d'intensité 2 A. La valeur minimale de la puissance dissipée par effet Joule est de 4,2 W.

Cas n° 2

Dans cet exemple, le minimum de P sur l'intervalle $[I_1 min\ ; I_1 max]$ ne coïncide pas avec l'abscisse du sommet de la parabole.



Les contraintes

On a donc $K = I_3 + I_4 = 6$ et donc $I_2 = 6 - I_1$. Comme I_2 est inférieur à s_2 qui vaut 4, on a :

$6 - I_1 \leq 4$ et donc $I_1 \geq 2$. Ainsi I_1 varie dans l'intervalle $[2\ ; 5]$.

La puissance à minimiser

La puissance dissipée par effet Joule est $P = R_1.I_1^2 + R_2.I_2^2 + R_3.I_3^2 + R_4.I_4^2$

Soit : $P = 0{,}2.I_1^2 + 0{,}05.(6 - I_1)^2 + 0{,}2 \times 4^2 + 0{,}2 \times 2^2$

Ce qui, après développement, s'écrit $P = 0{,}25\ I_1^2 - 0{,}6\ I_1 + 5{,}8$.

On doit déterminer la valeur de I_1 minimisant P pour I_1 sur l'intervalle $[2\ ; 5]$.

Optimisation

On a cette fois, $P = 0{,}25\ I_1^2 - 0{,}6\ I_1 + 5{,}8$, soit :

$$P = 0{,}25(I_1 - 1{,}2)^2 + 5{,}44$$

La fonction admet un minimum sur $\mathbb{R}$ en $I_1 = 1{,}2$, valeur qui n'appartient pas à l'intervalle $[2; 5]$. Comme la fonction P est croissante sur $[2; 5]$, la puissance dissipée par effet Joule est minimale lorsque $I_1 = 2A$ et $I_2 = 4A$. Elle vaut alors $0{,}25 \times (2 - 1{,}2)^2 + 5{,}44 = 5{,}6\ W$.

Cas n° 3

Dans ce dernier exemple, similaire au précédent, le minimum de P sur l'intervalle $[I_1 min, I_1 max]$ ne coïncide pas avec l'abscisse du sommet de la parabole.

Un raisonnement similaire permet de montrer que la puissance dissipée est minimale lorsque I_1 vaut $4{,}5\ A$ et de calculer la puissance dissipée par effet Joule correspondante.