INTRODUCTION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES

LA DÉSINTÉGRATION RADIOACTIVE AU SERVICE DE L'IMAGERIE MÉDICALE

Prérequis

- Définition par récurrence, explicitation du terme de rang n, sens de variation et représentation graphique d'une suite géométrique à termes strictement positifs.
- Taux d'évolution. Moyenne arithmétique et moyenne géométrique. Calculs sur les puissances entières.

Références au programme

Situation problème sur la demi-vie d'un élément radioactif. Nombre de noyaux radioactifs présents dans un échantillon au bout d'une fraction de demi-vie. Applications à la médecine.

Domaine

Modélisation d'un phénomène d'évolution suivant une décroissance exponentielle par un modèle discret et introduction du modèle continu correspondant. Approches des fonctions exponentielles.

Compétences mathématiques

Chercher : Exploitation d'un tableur ou d'un logiciel de géométrie dynamique pour émettre des conjectures. Possibilité d'utiliser un programme en Python pour déterminer un seuil.

Représenter : Utilisation d'un nuage de points afin de parvenir à l'approximation d'un modèle continu.

Modéliser : Modélisation de la situation à l'aide d'une suite géométrique, afin de présenter les fonctions exponentielles comme prolongement sur $[0\,;+\infty[$ à des valeurs non entières positives des suites géométriques de raison positive.
Calculer : Calcul de termes d'une suite géométrique, calcul de moyennes arithmétiques et géométriques, calculs sur les puissances d'un réel positif.
Raisonner : Étudier le sens de variation d'une suite géométrique. Démontrer qu'un nombre est la moyenne géométrique de deux autres.
Communiquer : Expliciter des résultats et des propriétés mathématiques par oral ou par écrit tout en apportant une réponse à une problématique en lien avec la physique.

Histoire, enjeux, débats

À la fin du XIXe siècle, deux découvertes majeures pour l'imagerie médicale sont réalisées presque par hasard.

En 1895, le physicien allemand Wilhelm Conrad Röntgen découvre les rayons X et invente la radiologie. Alors qu'il cherche à élucider la nature de l'électricité et étudie la lumière fluorescente émise lors du passage d'un courant électrique dans une ampoule contenant un gaz à basse pression (tube de Crookes), dans une expérience réalisée en chambre noire, Röntgen observe un phénomène de fluorescence d'une plaque photographique à distance du tube de Crookes alors même que celui-ci est recouvert de carton noir. Il observe aussi que ce phénomène persiste s'il interpose des objets entre le tube et la plaque : quand une main vivante est interposée, son squelette devient visible. Röntgen en déduit qu'un rayonnement invisible est émis et lui donne le nom de rayons X (en raison de son origine inconnue).

L'année suivante, en 1896, un phénomène naturel, la radioactivité, est découvert par Henri Becquerel alors qu'il faisait des recherches sur la fluorescence des sels d'uranium. Il constate qu'une plaque photographique en contact avec des sels d'uranium est impressionnée même dans l'obscurité (au fond d'un tiroir), c'est-à-dire tout à fait indépendamment de la lumière et donc de la phosphorescence. Il en conclut que l'uranium émet son propre rayonnement. Cette radiation est en fait due à la désintégration de certains noyaux d'uranium. Le phénomène de désintégration de noyaux instables est baptisé « radioactivité » en 1898 par Pierre et Marie Curie qui découvrent d'autres substances radioactives naturelles comme le plutonium et le radium. L'avancée majeure suivante est réalisée en 1934 par Irène Curie et

Frédéric Joliot à travers la production d'une substance radioactive n'existant pas dans la nature. Cette découverte de la radioactivité artificielle ouvre la porte à la création contrôlée de noyaux radioactifs et la possibilité de réactions en chaîne susceptibles de fournir une quantité considérable d'énergie. La radioactivité a de nombreuses applications civiles, tant dans le domaine industriel (production d'électricité dans les centrales nucléaires) que médical où elle est à la fois utilisée à des fins diagnostiques et thérapeutiques.

L'ensemble des applications médicales de la radioactivité est appelé la **médecine nucléaire.** Cette spécialité médicale utilise les différents types de rayonnements émis par des éléments radioactifs pour observer les organes durant leur fonctionnement, permettant ainsi l'étude, le diagnostic et le traitement de nombreuses maladies. Mais, ces rayonnements radioactifs, à fort dosage, ont aussi la capacité de détruire certaines cellules ciblées comme des cellules cancéreuses. Ainsi, la médecine nucléaire comprend l'imagerie fonctionnelle, la radiothérapie et la radio-immunologie (voir lexique en fin de ressource).

Les mathématiques et la mesure de la radioactivité

La situation choisie prend appui sur un sujet de l'épreuve de physique-chimie du baccalauréat (Bac S Nouvelle-Calédonie novembre 2011). Elle a pour objectif d'illustrer la notion de modèle d'évolution discret à croissance exponentielle en s'appuyant sur la demi-vie d'un traceur radioactif lors d'une scintigraphie cardiaque, avant d'introduire le modèle continu qui lui est associé et ainsi les fonctions exponentielles. Le choix de l'imagerie médicale permet d'aborder un domaine propre à la physique accessible à tous les élèves, mais également de changer le regard du citoyen sur l'utilisation de la médecine nucléaire souvent associée à une médecine « invasive ». Elle présente aussi l'intérêt de définir des notions auxquelles le citoyen est confronté que sont l'activité radioactive d'une substance et son unité de mesure qui est le becquerel.

L'intérêt de la situation est de montrer les limites du modèle discret et donc de justifier l'introduction du modèle continu que représentent les fonctions exponentielles.

> **Remarque** : Dans un souci de simplification, la contextualisation de cette activité s'affranchit du temps écoulé entre la conception du produit et son utilisation lors de l'examen médical. Par ailleurs, l'affichage des résultats à la minute près est purement théorique et n'a pas de véritable sens physique compte tenu de la précision des données.

Intentions pédagogiques

Les objectifs de cette activité sont :

- exploiter les acquis des élèves sur les suites géométriques ;
- développer l'autonomie des élèves dans l'utilisation des outils à leur disposition pour mener à bien leurs recherches, tels que le tableur, GeoGebra, l'algorithmique et la programmation ;
- introduire les fonctions exponentielles en montrant les limites d'un modèle discret et la nécessité d'étendre ce modèle d'évolution à un modèle continu.

Scénarios pédagogiques

Modalités

L'activité est réalisée en deux temps.

La première partie est un travail individuel commun à tous les élèves d'une trentaine de minutes où l'élève peut exploiter ses connaissances sur les suites géométriques et utiliser le ou les outils de son choix pour émettre ses conjectures.

À l'issue de cette première partie, une mise en commun des résultats et une confrontation des démarches entreprises est fait et illustre la nécessité de l'utilisation d'un modèle continu.

La seconde partie, d'une durée approximative d'une heure, a pour but de proposer trois introductions différentes des fonctions exponentielles afin de différencier les approches en fonction de la diversité des compétences des élèves et d'illustrer différentes approches proposées par le programme. Elle est suivie d'une phase de bilan et d'institutionnalisation.

Situation de l'activité

La scintigraphie cardiaque est une technique d'imagerie médicale qui permet d'examiner la qualité de l'irrigation du cœur par les artères coronaires. Au cours de cet acte médical, du thallium 201 est injecté au patient par voie intraveineuse. Cet élément radioactif, émetteur de rayons gamma, n'est fixé que par les cellules vivantes du cœur et son rayonnement de faible énergie est alors détecté par

http://www.nucleanord.fr/img//content-2. 1

une caméra gamma ou caméra à scintillations (contrairement à la radiographie, où le rayonnement est émis par l'appareil). Ainsi, les zones du muscle cardiaque qui sont mal irriguées et ne fixent pas le thallium 201 apparaissent comme des zones sombres (points froids) sur la scintigraphie.

Au cours d'un tel examen, on injecte à un patient un échantillon de thallium 201 d'activité radioactive 100 MBq (mégabecquerel).

On appelle demi-vie le temps mis par une substance radioactive pour perdre la moitié de son activité.

Ainsi, après une demi-vie, l'activité radioactive de cet échantillon de thallium 201 est de 50 MBq et après deux demi-vies, l'activité radioactive de cet échantillon est de 25 MBq.

On considère que la demi-vie du thallium 201 vaut 74 heures.

On estime que les résultats de la scintigraphie sont exploitables tant que l'activité du traceur radioactif est strictement supérieure à 3 MBq. L'objectif de l'activité est de déterminer la durée dont on dispose après l'injection de l'échantillon de thallium 201 pour réaliser l'examen du patient.

Différentiation : scénarios pédagogiques

Scénario pédagogique n°1

L'objectif visé est ici d'ajouter des « points intermédiaires » à un nuage de points représentant une suite géométrique par dichotomies successives (moyenne arithmétique des abscisses et moyenne géométrique des ordonnées) à l'aide d'un tableur. Cette démarche suppose que les moyennes arithmétique et géométrique aient été définies en amont.

Scénario pédagogique n°2

L'objectif est ici de commencer par définir la racine *n*-ième d'un réel positif, puis de construire les puissances à exposant rationnel positif afin de conserver les propriétés des fonctions puissances entières étudiées en seconde.

Scénario pédagogique n°3

L'objectif est de se limiter au recours à la calculatrice pour obtenir la valeur de a^x pour tout réel x strictement positif et d'utiliser les courbes de tendance du tableur afin de « compléter » le nuage de points représentant une suite géométrique et obtenir ainsi la courbe d'une fonction continue. On en profite pour observer quelques courbes de fonctions exponentielles et voir sur des exemples la conservation des propriétés des fonctions puissances entières étudiées en seconde.

Déroulement

La partie A étant un réinvestissement des connaissances des élèves sur les suites géométriques, elle peut être traitée en salle informatique comme sous la forme d'un travail personnel à réaliser à la maison.

À l'issue de cette première partie, la mise en commun des résultats et la confrontation des démarches entreprises peut prendre la forme de petites présentations orales suivies d'un débat d'idées.

La partie B peut être réalisée sous la forme d'un travail de groupes de 3 ou 4 élèves. L'enseignant peut alors faire le choix d'un scénario pour chaque groupe ou proposer deux ou trois scénarios. Le fait de proposer des sujets différents permet de différencier les approches et d'enrichir la phase d'institutionnalisation de la plus-value apportée par chaque groupe. En effet, un rapporteur par groupe peut être désigné pour présenter ses résultats. L'idée est de construire ensuite une synthèse qui soit le fruit des différents apports afin de parvenir à une définition des fonctions exponentielles et de mettre en évidence les premières propriétés de ces fonctions. Le premier scénario pédagogique permet de mettre en évidence la construction de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto a^t$ comme prolongement continu sur $[0\,;+\infty[$ du nuage de points de la suite de terme général a^n. Le second scénario présente l'avantage de définir le taux d'évolution moyen correspondant à n évolutions successives et la racine n-ième d'un réel positif, pour permettre la construction des puissances à exposant rationnel positif afin de conserver les propriétés des fonctions puissances entières étudiées en seconde. Enfin, le troisième scénario est l'occasion d'évoquer le fait que l'image de la somme de deux réels par une fonction exponentielle est le produit des images de ces deux réels, ainsi que le sens de variation des fonctions exponentielles.

Exemples de questions

L'idée est ici de présenter des exemples de questionnements possibles suivant les scénarios retenus. On rappelle que la partie A est commune à tous les élèves.

Partie A : Modélisation discrète

On note u_0 l'activité radioactive de cet échantillon (en centaine de MBq) à l'injection et u_n l'activité radioactive de cet échantillon (en centaine de MBq) après n demi-vies avec n entier naturel.

1. Donner les valeurs de u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

3. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

4. Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

5. Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel $u_n < 0{,}03$.

6. Représenter graphiquement les termes de la suite (u_n) pour n variant de 0 à 6. (On prendra 2 cm pour représenter 1 demi-vie sur l'axe des abscisses et 1 cm pour représenter 5 MBq sur l'axe des ordonnées).

7. a. Donner une estimation de l'activité radioactive du traceur radioactif au bout de 2,5 demi-vies.

7. b. En utilisant le graphique précédent, donner une estimation de la durée après l'injection de thallium 201 pendant laquelle les résultats de la scintigraphie sont exploitables.

Partie B du scénario pédagogique 1

Dans cette partie, **l'unité de temps est la demi-vie du thallium 201.**

On suppose que le taux d'évolution de l'activité radioactive du traceur radioactif est constant sur des intervalles de temps égaux.

1. a. On note A l'activité radioactive du traceur radioactif exprimée en centaine de MBq à l'instant $t = 0{,}5$.
Démontrer que $\frac{A}{u_0} = \frac{u_1}{A}$. Puis en déduire que A est la moyenne géométrique de u_0 et u_1.

1. b. En déduire que $A = \sqrt{\frac{1}{2}}$, puis donner une valeur approchée au millième de A.
<u>Remarque</u> : Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $\sqrt{x} = x^{0,5}$
Ainsi $A = \left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}$

2. a. Calculer une valeur arrondie au millième de la moyenne géométrique B de u_1 et u_2. Que représente ce nombre B ?

2. b. Démontrer que $B = \left(\frac{1}{2}\right)^{1,5}$.

3. On souhaite utiliser un tableur pour représenter l'activité radioactive du traceur radioactif exprimée en centaine de MBq en fonction du temps exprimé en nombre de demi-vies du thallium 201 .

Pour tout entier naturel n compris entre 0 et 5, on note $f(n+0{,}5)$ l'activité en centaine de MBq du traceur radioactif aux instants $n+0{,}5$.

	A	B	C	D
1	n	u_n	$n+0{,}5$	$f(n+0{,}5)$
2	0	1	0,5	
3	1	0,5	1,5	
4	2	0,25	2,5	
5	3	0,125	3,5	
6	4	0,0625	4,5	
7	5	0,03125	5,5	
8	6	0,015625		

3\. a. Quelle formule doit-on saisir dans la cellule D2 avant de la recopier vers le bas ?

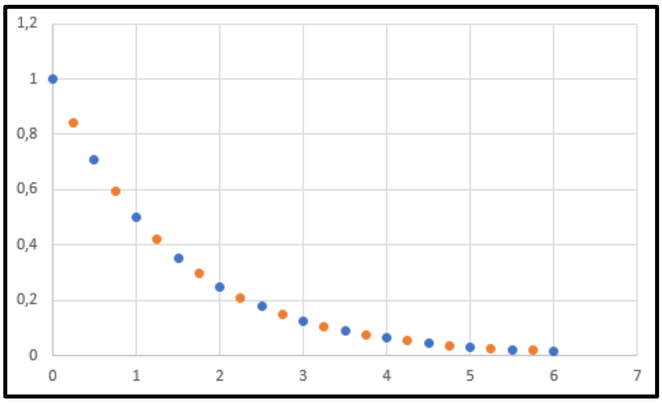
3\. b. Saisir cette feuille de calcul sur un tableur. Le résultat trouvé au A.7.a. est-il cohérent ?

3\. c. Compléter votre représentation graphique obtenue à la question **6.** de la partie A avec les points de coordonnées $(n+0{,}5\ ;\ f(n+0{,}5))$

4\. On réitère le procédé de manière à déterminer l'activité radioactive du traceur radioactif aux instants $n+0{,}25$ et $n+0{,}75$.

On note t le temps écoulé en demi-vies depuis l'injection et $f(t)$ l'activité en centaine de MBq du traceur radioactif. On obtient alors les résultats suivants :

	A	B	C	D
1	t	f(t)	t	f(t)
2	0	1	0,25	0,84089642
3	0,5	0,70710678	0,75	0,59460356
4	1	0,5	1,25	0,42044821
5	1,5	0,35355339	1,75	0,29730178
6	2	0,25	2,25	0,2102241
7	2,5	0,1767767	2,75	0,14865089
8	3	0,125	3,25	0,10511205
9	3,5	0,08838835	3,75	0,07432544
10	4	0,0625	4,25	0,05255603
11	4,5	0,04419417	4,75	0,03716272
12	5	0,03125	5,25	0,02627801
13	5,5	0,02209709	5,75	0,01858136
14	6	0,015625		



4\. a. En utilisant le tableau obtenu, donner une estimation de l'activité radioactive du traceur radioactif aux instants 4,75 et 5,25.

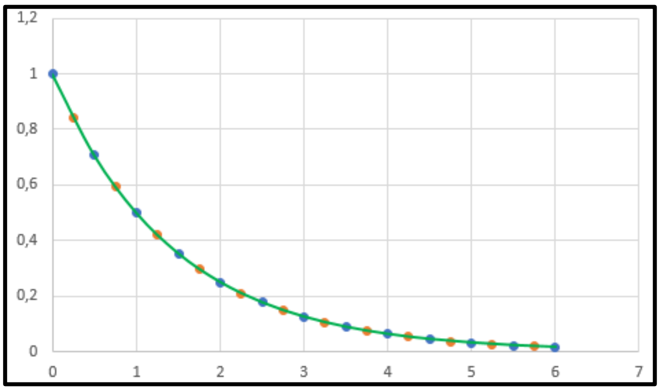
4\. b. Calculer $\left(\frac{1}{2}\right)^{4{,}75}$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^{5{,}25}$. Que constatez-vous ?

4\. c. Le graphique obtenu suggère le tracé de la courbe d'une fonction.

On appelle **fonction exponentielle** une telle fonction.

On définit cette fonction sur $[0\ ;+\infty[$ par $t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

On a représenté ci-dessous sa courbe représentative sur l'intervalle [0 ; 6] et le nuage de points précédent.



Construire, à l'aide de GeoGebra ou de votre calculatrice, la représentation graphique de cette fonction, puis déterminer à la minute près la durée après l'injection de thallium 201 pendant laquelle les résultats de la scintigraphie sont exploitables.

Partie B du scénario pédagogique 2

Dans cette partie, **l'unité de temps est la demi-vie du thallium 201.**
Lors de n évolutions successives à des taux t_1, t_2, ..., t_n entre une valeur V_0 et une valeur V_n, le taux d'évolution moyen est le taux, noté t_M, qu'il faut appliquer n fois successivement à la valeur V_0 pour obtenir la valeur V_n.

Le taux d'évolution moyen t_M est donc tel que $(1 + t_M)^n = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n)$.

Autrement dit, si on note x le coefficient multiplicateur associé à une évolution à un taux moyen t_M, alors $x = 1 + t_M$ et le coefficient multiplicateur global C associé à ces n évolutions successives est tel que $x^n = C$.

On suppose que le taux d'évolution de l'activité radioactive du traceur radioactif est constant sur des intervalles de temps égaux.

On note t le temps écoulé exprimé en nombre de demi-vies depuis l'injection et $f(t)$ l'activité en centaine de MBq du traceur radioactif.

1. a. Notons x le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution de l'activité radioactive du traceur radioactif entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 0{,}25$.
Démontrer que $x^4 = \frac{1}{2}$.

1. b. On admet que si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et C est un réel positif, alors l'équation $x^n = C$ admet pour unique solution $C^{\frac{1}{n}}$ sur $[0 ; +\infty[$. Ce nombre est appelé la **racine n-ième de C** et on le note aussi $\sqrt[n]{C}$.

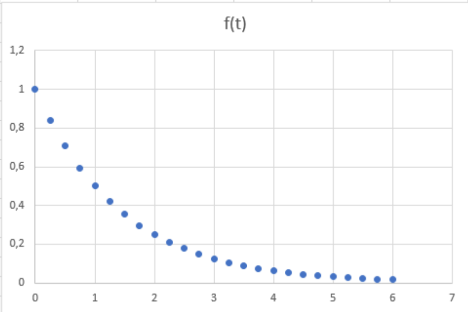
En déduire que $f\ (0{,}25) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

1. c. Calculer la valeur exacte puis une valeur arrondie au millième de $f\left(\frac{1}{4}\right)$ et $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

1. d. Calculer la valeur exacte puis une valeur arrondie au millième de $f(4{,}75)$ et $f(5{,}25)$.

2. a. On a utilisé un tableur pour représenter l'activité du traceur radioactif exprimée en centaine de MBq en fonction du temps exprimé en nombre de demi-vies du thallium 201.

	A	B
1	t	f(t)
2	0	1
3	0,25	0,84089642
4	0,5	0,70710678
5	0,75	0,59460356
6	1	0,5
7	1,25	0,42044821
8	1,5	0,35355339
9	1,75	0,29730178
10	2	0,25
11	2,25	0,2102241
12	2,5	0,1767767
13	2,75	0,14865089
14	3	0,125
15	3,25	0,10511205
16	3,5	0,08838835
17	3,75	0,07432544
18	4	0,0625
19	4,25	0,05255603
20	4,5	0,04419417
21	4,75	0,03716272
22	5	0,03125
23	5,25	0,02627801
24	5,5	0,02209709
25	5,75	0,01858136
26	6	0,015625



Dans la colonne B figure l'activité du traceur radioactif exprimée en centaine de MBq aux instants t. On a ensuite représenté le nuage de points associé.

2. b. Quelle formule a-t-on saisie dans la cellule B3 avant de la recopier vers le bas ?
Le résultat trouvé au **A.7.a**. est-il cohérent ?

3. On souhaite désormais connaître l'activité radioactive toutes les heures de l'échantillon de thallium 201 injecté au patient.

3. a. Démontrer que l'activité radioactive au bout d'une heure du traceur radioactif de l'échantillon de thallium 201 injecté au patient est $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{74}}$ centaine de MBq.

3. b. Déterminer l'activité radioactive du traceur radioactif 10 jours après son injection.

3. c. Déterminer à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, à l'heure près, la durée après l'injection de thallium 201pendant laquelle les résultats de la scintigraphie sont exploitables.

3. d. Le graphique obtenu à la question **2**. suggère le tracé de la courbe d'une fonction.
On appelle **fonction exponentielle** une telle fonction.
On définit cette fonction sur $[0\,;+\infty[$. par $t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^t$.
Construire, à l'aide de GeoGebra ou de votre calculatrice, la représentation graphique de cette fonction, puis déterminer à la minute près la durée après l'injection de thallium 201 pendant laquelle les résultats de la scintigraphie sont exploitables.

Partie B du scénario pédagogique 3 :

Dans cette partie, **l'unité de temps est la demi-vie du thallium 201**
On appelle **fonction exponentielle** une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $t \mapsto a^t$ où a est un réel strictement positif.

1. a. On considère la fonction exponentielle $g : t \mapsto 5^t$.
Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

t	0	1	2	3	3,2	π	$\frac{1}{7}$
$g(t)$							

1. b. On considère la fonction exponentielle $h : t \mapsto 0{,}7^t$.
Compléter à l'aide de la calculatrice le tableau de valeurs suivant :

t	0	1	2	3	3,2	π	$\frac{1}{7}$
$h(t)$							

1. c. Représenter sur votre calculatrice les fonctions g et h et décrire l'allure des courbes.

2. À l'aide d'un tableur, construire le nuage de points représentant les termes de la suite (u_n) définie dans la partie A.
Ensuite, ajouter une courbe de tendance linéaire, puis une courbe de tendance polynômiale de degré 2, et enfin une courbe de tendance exponentielle.
Quelle est celle qui semble le mieux modéliser la situation ?

Pour la suite, on note t le temps écoulé exprimé en demi-vies depuis l'injection et $f(t)$ l'activité en centaine de MBq du traceur radioactif.

3. a. Il semble que f soit une fonction exponentielle d'après la question précédente. En s'appuyant sur les résultats de la partie A, déterminer le réel a tel que $f(t) = a^t$ pour tout $t \in [0\,;+\infty[$

3. b. Calculer à l'aide de la calculatrice $f(2{,}5)$ et $f(4{,}75)$. Les résultats seront arrondis au millième.

3. c. Le résultat trouvé au A.7.a. est-il cohérent ?

4. On souhaite désormais connaître l'activité radioactive toutes les heures de l'échantillon de thallium 201 injecté au patient.

4. a. Démontrer que l'activité radioactive au bout d'une heure du traceur radioactif de l'échantillon de thallium 201 injecté au patient est $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{74}}$ centaine de MBq.

4. b. Déterminer l'activité radioactive du traceur radioactif 10 jours après son injection.

4. c. Écrire un programme en Python ou utiliser un tableur afin de déterminer à l'heure près la durée après l'injection de thallium 201 pendant laquelle les résultats de la scintigraphie sont exploitables.

5. a. Calculer $f(5)$ puis $f(2) \times f(3)$. Que constatez-vous ?

5. b. Calculer $f(4)$ puis $f(1{,}5) \times f(2{,}5)$. Que constatez-vous ?

5. c. Sachant que $f(2{,}5) = \frac{\sqrt{2}}{8}$ et $f(3) = \frac{1}{8}$, émettre une conjecture sur la valeur exacte de $f(5{,}5)$, puis vérifier votre résultat à l'aide de la calculatrice.

6. Construire, à l'aide de GeoGebra ou de votre calculatrice, la représentation graphique de la fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^t$, puis déterminer à la minute près la durée après l'injection de thallium 201 pendant laquelle les résultats de la scintigraphie sont exploitables.

Commentaires de l'activité

Analyse a priori

Il est nécessaire de laisser un temps d'appropriation de la situation et de s'assurer que les élèves aient bien compris quelles étaient les unités de mesures choisies.

La partie A permet, par une exploitation d'acquis sur les suites géométriques, une entrée accessible à tous dans l'activité.

Les trois scénarios possibles proposés pour traiter la partie B permettent de différencier les approches en s'appuyant sur les propositions faîtes dans le programme pour introduire les fonctions exponentielles.

À travers ces trois scénarios, les élèves sont conduits à développer leur autonomie dans la résolution de problème en mobilisant différents outils que sont la calculatrice, le tableur, un grapheur ou encore l'algorithmique et la programmation.

Pour le premier scénario, il est nécessaire d'avoir au préalable travaillé la notion de moyenne géométrique. Pour, le second scénario, il est préférable d'avoir au préalable retravaillé les automatismes sur les taux d'évolutions. Il est aussi important d'avoir réactivé par les automatismes les calculs sur les puissances pour les deux derniers scénarios.

Verbaliser

À l'issue de la partie A, les élèves sont conduits à présenter oralement leur modélisation discrète de la situation proposée. Il s'en suit un échange entre pairs sur les méthodes qui peuvent d'apporter une réponse plus précise à la problématique.

À l'issue de la partie B, réalisée sous la forme d'un travail de groupe, un rapporteur par groupe peut être désigné au hasard pour faire état de chaque production, l'objectif étant d'assurer des échanges constructifs au sein de chaque groupe et que chaque membre soit impliqué dans le travail collaboratif. Les élèves sont conduits à apporter une réponse à une problématique en lien avec la physique, mais aussi à présenter des résultats sur la fonction exponentielle. Les uns présentent la construction de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto a^t$ comme prolongement continu sur $[0\,;+\infty[$ du nuage de points de la suite de terme général a^t, d'autres la construction des puissances à exposant rationnel positif afin de conserver les propriétés des fonctions puissances entières étudiées en seconde, ou la racine n-ième d'un réel positif et le taux d'évolution moyen correspondant à n évolutions successives, quand les derniers mettent en évidence des propriétés algébriques des fonctions exponentielles ainsi que leur sens de variation.

Manipuler

Les élèves sont amenés à calculer des termes d'une suite géométrique à la main, à la calculatrice ou à l'aide d'un tableur. Certains manipulent des moyennes arithmétiques et des moyennes géométriques, d'autres des taux d'évolution, la racine *n*-ième d'un réel positif, mais aussi les calculs sur les puissances.
Ils peuvent être amenés à construire une feuille de calcul et à représenter un nuage de points, ainsi que des courbes de tendance sur un tableur.

Ils sont amenés à écrire un programme en Python ou utiliser un grapheur, leur calculatrice ou un tableur pour déterminer un seuil.

Abstraire

Les différentes modélisations de la situation conduisent les élèves à passer d'un registre algébrique à un registre graphique et réciproquement. Ils sont aussi amenés à définir le modèle continu de la croissance et de la décroissance exponentielle.

Pistes de différenciation possible

Les pistes de différenciation ont été évoquées précédemment à travers les différents scénarios possibles pour la partie B. L'idée est de permettre à chaque élève de manipuler, de verbaliser et de parvenir à une certaine abstraction. Chacun d'entre eux doit être en mesure de contribuer à la synthèse finale lors de la phase d'institutionnalisation.

Piste d'évaluation

Il peut être intéressant de permettre aux élèves de réexploiter les notions manipulées dans cette activité sur un autre thème en abordant une croissance exponentielle. On peut facilement élaborer une situation portant par exemple sur la croissance d'une population de bactéries ou sur le placement d'un capital à intérêts composés.

Ressources complémentaires

Quelques définitions

Activité radioactive

L'activité radioactive d'une source radioactive est égale au nombre d'atomes radioactifs qui se désintègrent en son sein par unité de temps.

Le becquerel

Le becquerel est l'unité du Système international qui permet de mesurer l'activité radioactive d'une source radioactive. Un becquerel correspond à une désintégration d'un noyau radioactif par seconde.

L'imagerie fonctionnelle in vivo

L'imagerie fonctionnelle in vivo consiste en l'administration d'un traceur radioactif au patient permettant sa détection externe. Ce sont les scintigraphies (émission de rayonnements gamma) ou les tomographies par émission de positons.

La scintigraphie repose dans un premier temps sur l'injection dans une veine d'une petite quantité de produit radioactif. Ce produit, appelé **traceur** (ou produit radio pharmaceutique), est de nature différente selon l'organe étudié.

Le traceur se fixe sur les structures de l'organe et émet alors des signaux (rayons gamma). Ceux-ci sont analysés grâce à un appareil spécifique (gamma-caméra), placé devant la zone à étudier.

La caméra enregistre la concentration du produit radioactif dans les différentes parties de l'organe concerné. On visualise ensuite la répartition du traceur sur l'écran d'un ordinateur couplé à la caméra, sous forme de points scintillants. Le nombre de points est susceptible de varier selon les régions examinées.

Il est plus important dans les **zones dites d'hyperfixation** ou « points chauds ». Celles-ci peuvent correspondre à un foyer infectieux, à une tumeur, etc.

Les points sont moins nombreux dans les **zones d'hypofixation** ou « points froids », révélant par exemple la présence d'un tissu détruit ou mal irrigué par les vaisseaux sanguins.

La **tomographie par émission de positons** (**TEP ou PETscan**) repose sur l'injection intraveineuse d'une substance (le « **traceur** ») marquée par un **atome radioactif**, le fluor 18 ou le carbone 11, qui émet des particules particulières, les **positons**. Le traceur est choisi pour se fixer sur un organe ou un tissu. En se fixant sur les cellules cibles, le traceur émet des positons ; un positon émis va s'annihiler avec un électron présent dans le milieu en émettant une paire de photons gamma qui partent dans deux directions opposées. Une couronne de détecteurs disposée autour du patient capte ces couples de photons et un traitement informatique permet de reconstituer, à partir de ces émissions de photons, une image de l'organe étudié. La **TEP est une technique excellente pour mesurer le degré d'activité des cellules** (en choisissant un traceur qui est consommé par la cellule, comme un dérivé du glucose).

La radiothérapie

Il existe différents types de radiothérapie comme :

- la radiothérapie externe : les rayons sont émis par une machine appelée accélérateur linéaire de particules, située à proximité du patient et dirigée vers la région du corps à traiter. Ces rayons traversent la peau pour atteindre la zone à traiter ;
- la curiethérapie : des sources radioactives sont mises en contact direct avec la zone à traiter à l'intérieur du corps afin d'épargner les tissus sains environnants. C'est un traitement le plus souvent dédié à des cancers localisés avec des indications spécifiques ;
- la radiothérapie métabolique : les substances radioactives sont administrées par voie orale (boisson ou capsule) ou par injection intraveineuse. Des constituants radioactifs se fixent ensuite sur les cellules cancéreuses pour les détruire.

La radio-immunologie

La radio-immunologie est une technique de recherche et de dosage de substances chimiques, à l'aide d'un antigène ou d'un anticorps sur lequel on a fixé un marqueur radioactif.

Bibliographie et sitographie

Sur éduscol :

Modéliser et représenter : suites, exponentielles, probabilités (spécialité 1re)

Enseignement scientifique : désintégration radioactive (1re)

Sujet de CAPES sur les moyennes :
https://www.bibmath.net/pbs/capesext/capesext_2020_2_sujet.pdf

Déroulement d'une scintigraphie :
https://www.ameli.fr/assure/sante/examen/imagerie-medicale/deroulement-scintigraphie

Déroulement d'une tomographie :
https://www.vidal.fr/sante/examens-tests-analyses-medicales/tomographie

Différents types de radiothérapie :
https://www.e-cancer.fr/Patients-et-proches/Se-faire-soigner/Traitements/Radiotherapie