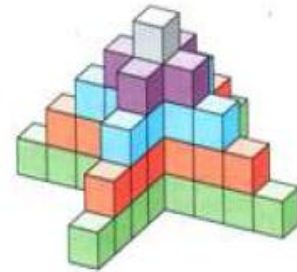


Yannick DANARD – groupe TraAM Maths et TICE de l'académie de Nantes –2012

« Empilons les cubes ! » en 6^{ème}



Compétence calculatoire travaillée ou en lien avec ces activités :

Il s'agit essentiellement de consolider des compétences en calcul numérique. L'activité renforce le sens des opérations et prépare le terrain pour l'arrivée du calcul littéral.

Descriptif rapide :

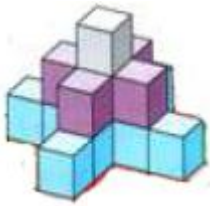
Ce document présente des travaux qui ont été menés en 6^{ème}. Tous, en utilisant des suites de nombres, ont permis également un travail de consolidation en calcul. Certains documents ou activités ont été utilisés également en 5^{ème}, 4^{ème} ou 3^{ème}. Ils font l'objet d'un autre document.

Enoncé de l'exercice	2
Enoncé donné aux élèves	2
Consignes données aux élèves	2
Objectifs	3
Textes de référence	3
Analyse des compétences calculatoires travaillées	3
Connaissances et compétences du socle commun développées dans cette activité	3
Scénario de mise en œuvre avec quelques travaux d'élèves	4
Ce qui a été fait avant	4
La séquence	4
Ce qui a été fait après	6
Annexes	7
Travaux effectués avant la séance	8
Devoir maison : « crypter »	10
TP informatique	11
Devoir maison : « établir une conjecture »	12

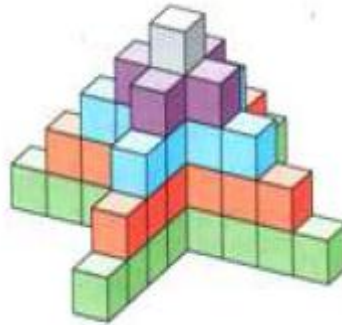
Enoncé donné aux élèves :

Des cubes...

Voici un empilement de cubes sur trois niveaux.



Voici un empilement de cubes sur cinq niveaux.



- 1) Combien y a-t-il de cubes dans l'empilement sur trois niveaux ?
- 2) Combien y a-t-il de cubes dans l'empilement sur cinq niveaux ?
- 3) Combien y aurait-il de cubes dans un empilement sur 10 niveaux ?
- 4) Pour un empilement de cubes de cette manière, on a utilisé 1326 cubes. Combien y a-t-il de niveaux ?
- 5) On considère qu'un cube a une arête de 2 cm.

Combien faut-il de niveaux pour atteindre un volume d'empilement proche de 1 litre ?

Consignes données aux élèves

Après lecture avec toute la classe du document, les élèves ont pour consigne de chercher à répondre aux questions par groupe de 3 élèves. Ils disposent de 20 minutes.

Ils savent qu'il n'est pas demandé de terminer le travail, en revanche, ils doivent formuler ce qui peut les bloquer.

Objectifs :

Cette activité posée sous une forme ouverte vise prioritairement à consolider la maîtrise du calcul numérique tout en renforçant la maîtrise des compétences de résolution de problème. Elle permet de travailler les suites de nombres et de justifier l'utilisation éventuelle de formules algébriques.

Texte de référence

[Programme de mathématiques de collège \(BO juillet 2008\)](#)

Documents ressources pour le collège :

[Le calcul numérique au collège](#)

[Les nombres au collège](#)

[Du numérique au littéral](#)

Plus spécifiquement, les compétences calculatoires travaillées dans ces activités sont celles que l'on retrouve dans le programme de la classe de 6^{ème} :

- Connaître les tables d'addition et de multiplication et les résultats qui en dérivent.
- La maîtrise des tables est consolidée par une pratique régulière du calcul mental sur des entiers.
- Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 5 et 10.
- Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 3, 4 et 9.
- Savoir effectuer ces opérations sous les diverses formes de calcul : mental, à la main ou instrumenté.

Connaissances et compétences du socle commun développées dans cette activité

Compétence 1 - La maîtrise de la langue française

Lire - Comprendre un énoncé, une consigne

Ecrire - Rédiger un texte bref, cohérent et ponctué, en réponse à une question ou à partir de consignes données

Compétence 3 - Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique

Savoir utiliser des connaissances et des compétences mathématiques

D2 : Nombres et calculs

D3 : Géométrie

Pratiquer une démarche scientifique et technologique, résoudre des problèmes

C1 : Rechercher et organiser l'information.

C2 : Calculer, mesurer, appliquer des consignes.

C3 : Engager une démarche, raisonner, argumenter, démontrer.

C4 : Communiquer à l'aide d'un langage mathématique adapté.

Compétence 4 - La maîtrise des techniques usuelles de l'information et de la communication (B2i)

Créer, produire, traiter, exploiter des données

Organiser un document et sa présentation

Différencier une situation simulée ou modélisée d'une situation réelle

Scénario

Testé en classe de 6^{ème} : 20 élèves, classe entière. Travaux de groupe puis séance en salle informatique.

Testé en classe de 6^{ème} : 23 élèves, classe entière. Travaux de groupe puis séance en salle informatique.

Ce qui a été fait avant (voir aussi annexe 1)

Au niveau tableur, une séance de découverte avait déjà eu lieu.

Le sens des opérations est travaillé couramment. Mais c'est la première activité donnant sens à la notion de formule.

Déroulement de la séquence

La première séance se déroule en configuration « papier-crayon » :

L'énoncé est distribué aux élèves et un temps permet de s'assurer que le travail à effectuer est compris par tous par un moment de lecture individuel puis par quelques échanges.

Les élèves se mettent ensuite en groupe de 3 et doivent produire un écrit par groupe.

En quelques minutes, tous les groupes obtiennent par comptage sur les figures le nombre de cubes dans l'empilement sur 3 niveaux et celui sur 5 niveaux.

Pour obtenir le nombre de cubes dans l'empilement sur 10 niveaux, les démarches se résument à :

- Faire un schéma de la situation : mais cela est trop difficile et les élèves abandonnent.
- Multiplier par 2 la valeur trouvée pour l'empilement sur 5 niveaux (ce raisonnement est faux...)

Un compte rendu écrit est demandé aux élèves. L'idée d'utiliser un tableur est évoquée par certains élèves. Son utilisation sera rendue possible pour tous lors d'une autre séance.

La seconde séance débute par un bilan :

- En se basant sur un empilement sur 2 niveaux et un empilement sur 4 niveaux, on observe que le nombre de cubes 4 niveaux n'est pas le double du nombre de cubes 2 niveaux. Cela rend la proposition obtenue pour un empilement 10 niveaux en multipliant par 2 le nombre de cubes sur l'empilement 5 niveaux très probablement faux !
- On observe les empilements successifs : 1 niveau, 2 niveaux, 3 niveaux, 4 niveaux, 5 niveaux. Il apparaît alors que chaque niveau contient 4 cubes de plus que le niveau précédent. On commence alors en classe une suite de nombres :

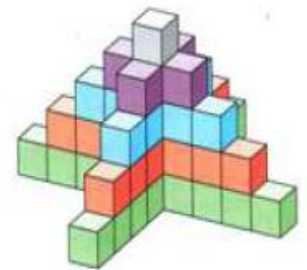
1 ; 5 ; 9 ; 13 ; 17 ; 21 ; 25 ; 29 ; 33 ; 37 puis les sommes associées pour connaître le nombre total de cubes utiles : 1 ; 6 ; 15 ; 28 ; 45 ; 66 ; 91 ; 120 ; 153 ; 190.

Ce travail est mené en calcul mental par l'ensemble de la classe, différents élèves étant interrogés au fur et à mesure de l'avancée des calculs.

- Ce travail apparait cependant très fastidieux pour répondre à la question suivante :
Pour un empilement de cubes de cette manière, on a utilisé 1326 cubes. Combien y a-t-il de niveaux ?

La suite du travail propose l'utilisation du tableur. L'énoncé est repris et les questions suivantes sont posées aux élèves (voir doc élève donné en annexe 3) :

- 1) Combien y aurait-il de cubes dans un empilement sur 10 niveaux ?
- 2) Pour un empilement de cubes de cette manière, on a utilisé 1326 cubes.
Combien y a-t-il de niveaux ?
- 3) Question défi : on considère qu'un cube a une arête de 2 cm.
Combien faut-il de niveaux pour atteindre un volume d'empilement proche de 1 litre ?



Les extraits suivants montrent quelques travaux d'élèves :

Les élèves observent comment étirer une cellule, et comment effectuer une programmation de cellule de la forme $=B1+4$ ou $=C2+B3$.

Travail de Corentin :

B4 fx =B3+4			
A	B	C	
	nombre de cubes par niveau	nombre de cubes total	
1			
2	Niveau 1	1	1
3	Niveau 2	5	6
4	Niveau 3	9	15
5	Niveau 4	13	28

C4 fx =B4+C3			
A	B	C	D
	nombre de cubes par niveau	nombre de cubes total	volume total
1			
2	Niveau 1	1	8 cm ³
3	Niveau 2	5	48 cm ³
4	Niveau 3	9	120 cm ³
5	Niveau 4	13	224 cm ³
6	Niveau 5	17	360 cm ³
7	Niveau 6	21	528 cm ³
8	Niveau 7	25	728 cm ³

D4 fx =C4*8			
A	B	C	D
	nombre de cubes par niveau	nombre de cubes total	volume total
1			
2	Niveau 1	1	8 cm ³
3	Niveau 2	5	48 cm ³
4	Niveau 3	9	120 cm ³
5	Niveau 4	13	224 cm ³

Par l'utilisation des formules tableur, on prépare le terrain à l'utilisation du calcul littéral et on installe la notion de récurrence qui peut s'oraliser de la manière suivante :

- on passe d'un terme au suivant en ajoutant 4.
- on passe d'une somme à la suivante en ajoutant le dernier terme.

Le travail sur le tableur sert de support à la rédaction d'un compte-rendu écrit :

<p>Compte-rendu d'Emma :</p> <p>En A1 j'ai écrit 1 et en A2 j'ai écrit 5 puis j'ai étiré.</p> <p>En B2 j'ai écrit = puis j'ai sélectionné A2, j'ai écrit + en B2 et j'ai sélectionné B1. J'ai cliqué sur entrée.</p> <p>1) Il y en aurait 190.</p> <p>2) Il y en a 26.</p> <p>3) Il faut 8 niveaux.</p> <p>En C2 j'ai écrit = puis j'ai sélectionné B2 et en C2 j'ai écrit +8 et j'ai écrit et appuyé entrée. J'ai étiré.</p>	<p>Compte-rendu de Marianne</p> <p>Compte rendu</p> <ul style="list-style-type: none">J'ai été sur le logiciel : OpenOffice.org Calc.Dans la colonne A, j'ai mis 1 et 2 puis j'ai tiré.Dans la colonne B, j'ai mis le nombre de cubes par niveau: (j'ai mis deux nombres (1 et 5) je les ait sélectionnés puis j'ai tiré. <p>Réponse à la question 1: Il y en aurait 190 190 car: dans la colonne C, j'ai mis le nombre total de cubes. donc: 1,6,15 j'ai sélectionné 6 et 15 et j'ai étiré.</p> <p>Réponse à la question 2: Si il y pour trouver 15 comme 5+1 =6 j'ai fait: =C1+B1 et entrée etc...</p> <p>Réponse à la question 2: Si il y a 1326 cubes, il y en a 26 niveaux</p> <p>Dans une colonne D je mets les aires (à priori on cube ferait 8 cm³) Ensuite je mets: =D1*C1 et ça fait 48 je sélectionne et je tire.</p> <p>Réponse à la question 3: Il faut 8 niveaux.</p>
<p>Compte-rendu de Corentin</p> <p>Nous avons utiliser le tableur excel pour reproduire un tableau de mathématique sur l'empilement des cubes sur vingt niveaux sur chaque niveaux il y a a chaque fois 4 cubes de plus par niveau donc j'ai pris la cellule A2 +4 pour trouver la cellule A3 qui est égal à 5 et puis j'étire sur vingt niveaux pour le nombre total de cube dans la cellule B3 je fais égal A3 + B2 puis j'étire pour le volume du cube je fais B2 x 8 et il faut 8 niveaux pour obtenir un volume proche de 11</p>	

Peu de travaux ressemblent à ceux d'Emma ou de Marianne. La plupart ont l'allure de celui de Corentin : les informations sont fournies 'en bloc', sans organisation.

Ce qui a été fait après (voir aussi annexe 2)

Un devoir maison (« Crypter ») a été donné aux élèves. Il permet de travailler les tables de multiplication, en particulier dans la première partie. Il oblige aussi à réfléchir sur la commutativité et l'associativité de la multiplication dans la dernière question du devoir.

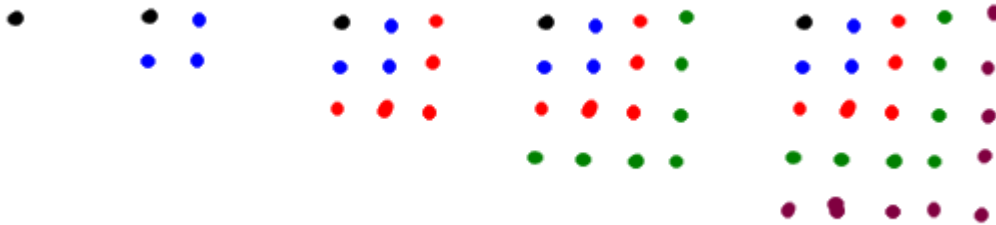
La lecture du tableau afin de connaître le code implique un repérage en colonnes et lignes qui prépare à l'utilisation du tableur. La forme cryptée amène une suite de nombres.

En classe, un travail est mené en alternant temps de travail individuel/mise en commun :

- 1) Etablir la liste des 20 premiers nombres impairs.

- 2) En utilisant cette suite de nombres impairs, établir la liste des nombres obtenus en ajoutant les deux premiers nombres de la liste, puis le trois premiers, puis les 4 premiers, etc... (Le 1 est ajouté en début de liste).
- 3) Observer, conjecturer.

Cette activité permet d'abord de retravailler les additions. Dans un deuxième temps, retrouver à partir de la liste 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 les produits 1×1 ; 2×2 ; 3×3 ; 4×4 ; 5×5 amène un travail sur la multiplication.



Cette présentation sous forme de schéma a permis aux élèves :

- De visualiser les sommes de nombres impairs : $+3$; $+5$; $+7$; ...
- De dire : « ce sont des carrés ! ». On parle alors de nombres carrés, de nombres triangulaires, de nombres pentagonaux dans une petite présentation historique.

ANNEXES

Annexe 1 : Ce qui a été fait avant

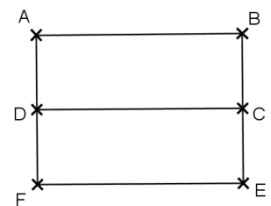
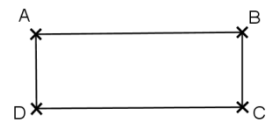
En activités rapides (chaque séance commence par 5 questions rapides)

Ces activités ont pour objectifs

- Entretenir des compétences en calcul mental (addition, multiplication)
- Arriver à une bonne représentation de ce qu'est un cube. De cette façon, les comptages et calculs de l'activité de référence ne seront pas parasités par des difficultés sur le cube.

Jour 1

- 1) Calculer la somme de 4 et du produit de 7 par 3.
- 2) ABCD est un rectangle de côtés 5 cm et 2 cm.
Calculer le périmètre de ce rectangle.
- 3) On ajoute au rectangle ABCD un rectangle identique CDFE de telle façon que ABEF soit aussi un rectangle.
Exprimer le périmètre de ABEF.
- 4) Est-il exact de dire que le périmètre du rectangle ABEF est le double de celui du rectangle ABCD ?
- 5) Est-il exact de dire que l'aire du rectangle ABEF est le double de celle du rectangle ABCD ?



Jour 2 :

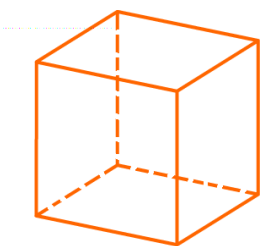
Ecrire tous les produits de deux nombres entiers égaux à 28.

Jour 3 :

Ecrire tous les produits de deux nombres entiers égaux à 15.

Jour 4 :

- 1) Décrire ce solide



- 2) Ecrire tous les produits de deux nombres entiers égaux à 45.

Jour 5 :

Dessiner un cube en perspective cavalière

Jour 6 :

Dessiner un pavé droit en perspective cavalière

Jour 7 : jour de l'activité.

Un pavé droit a pour longueurs d'arêtes : 4 cm ; 5 cm et 7 cm. Calculer l'aire d'une de ces faces.

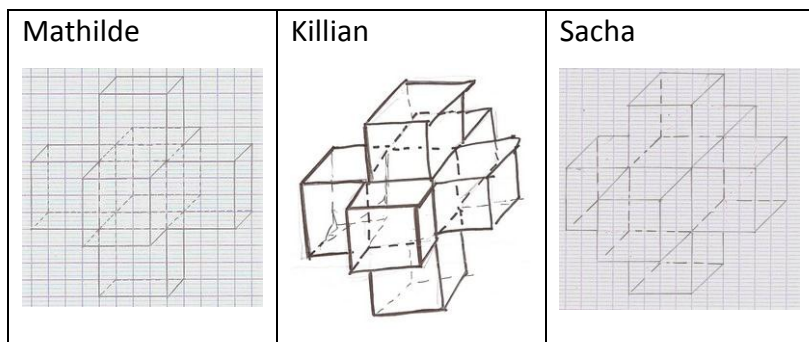
En corps de séances :

Travail sur les critères de divisibilités par 2, par 3, par 5, par 9, par 10. Cela permet d'établir les premières suites de nombres : nombres pairs, nombres impairs, nombres multiples de...

Ceci s'échelonne sur plusieurs séances, en s'appuyant sur les connaissances des élèves.

En travail à la maison :

Un solide composé de 7 cubes est proposé à la réalisation en perspective cavalière comme un « travail défi ». Quelques réalisations d'élèves :



Annexe 2 : devoir maison 6^{ème} (et 5^{ème}.)

Crypter

Première partie :

On veut écrire des nombres suivants sous la forme de produits de nombres entiers. L'objectif est d'avoir le plus de produits possibles dans la décomposition.

Exemple :

$$120 = 6 \times 20 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \text{ et donc on obtient } 120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Décomposer de cette manière les nombres :

12 ; 15 ; 24 ; 30 et 200.

Deuxième partie :

Le carré de Polybe

Nous prenons le carré de Polybe suivant, comportant 25 cases. Il est possible de l'étendre à 36 cases afin de pouvoir ajouter les chiffres ou pour chiffrer un alphabet comportant plus de lettres. Nous mettrons le I et le J dans la même case (même adresse) afin de pouvoir coder toutes les lettres de notre alphabet, car le carré initial est de 25 cases (5 colonnes \times 5 lignes). On ne tient pas compte des lettres accentuées, ainsi par exemple *é* sera codé *e*, comme *è* ou *ê* !

Ainsi, le texte "*Wikipédia*" sera crypté comme ceci :

- Le "*W*" est situé sur la colonne 2, et sur la ligne 5, il sera donc codé en 25.
- Le "*I*" ET le "*J*" sur la colonne 4 et à la ligne 2 sera donc chiffré en 42.

Et ainsi de suite pour obtenir le message « 25 42 52 42 53 51 41 42 11 » qui se traduit alors bien "WIKIPEDIA".

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I,J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

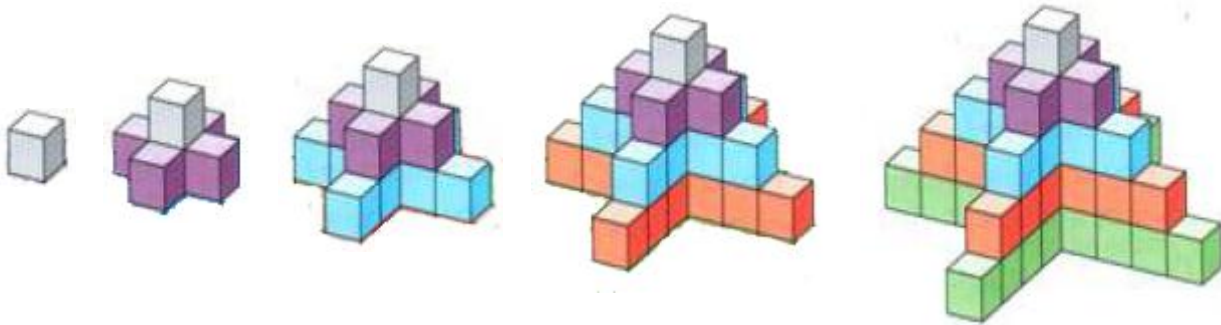
Source : wikipedia

- 1) Quel message permet de traduire « Clément Janequin » ?
- 2) Traduire : 11 13 51 35 11 33 41 24 42 51
- 3) Traduire : 31 11 13 31 54 13
- 4) Crypter votre prénom : sur votre copie, vous écrirez votre prénom non codé puis à côté votre prénom codé.
- 5) *Question défi* : On cherche un mot de 4 lettres. Une fois crypté, le produit des nombres obtenus est 351 384 soit 24×11^4 .
C'est-à-dire $24 \times 11 \times 11 \times 11 \times 11$.
Quel est ce mot ? Pour cette question, toute trace de recherche pourra être valorisée.

Annexe 3 : en TP informatique sur tableur

Des cubes...

Voici les empilements pour 1, 2, 3, 4 ou 5 niveaux :



Nous avons vu en classe :

Niveau	1	2	3	4	5
Nombre de cubes par niveau	1	5	9	13	17
Nombre total de cubes	1	6	15	28	45

Quelques questions étaient alors restées sans réponse :

- 4) Combien y aurait-il de cubes dans un empilement sur 10 niveaux ?
- 5) Pour un empilement de cubes de cette manière, on a utilisé 1326 cubes. Combien y a-t-il de niveaux ?
- 6) On considère qu'un cube a une arête de 2 cm.

Combien faut-il de niveaux pour atteindre un volume d'empilement proche de 1 litre ?

Utiliser le tableur afin de répondre à ces questions. **APPELER LE PROFESSEUR AVANT DE PASSER A LA SUITE.**

=====

Pour les plus rapides...

<p>Première partie :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Calculer le volume d'un cube d'arête 1 cm. 2) Calculer le volume d'un cube d'arête 2 cm. 3) Calculer le volume d'un cube d'arête 3 cm. 4) Calculer le volume d'un cube d'arête 4 cm. 5) Calculer le volume d'un cube d'arête 5 cm. 	<p>Deuxième partie :</p> <p>Sur une feuille du tableur,</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) En colonne A, établir la liste des nombres impairs de 1 à 99. 2) En colonne B, commencer par 1 puis établir la somme des deux premiers nombres de la liste précédente, puis la somme des trois premiers, puis la somme des quatre premiers, ... 3) En colonne C, commencer par le premier nombre de la colonne A (donc 1), puis établir la somme de 2 suivants de la colonne A (donc le résultat de 3 + 5), puis la somme des 3 suivants de la colonne A (donc le résultat de 7 + 9 + 11), puis la somme des 4 suivants de la colonne A... <p>Conjecturer.</p>
--	---

Annexe 4 : Un Devoir maison en complément du TP précédent. (en 6^{ème} et 5^{ème})

En effectuant les calculs demandés dans la dernière question du TP « Des cubes... », voilà ce que l'on peut obtenir sur un tableur.

Etablir une conjecture concernant les nombres de la colonne C.

	A	B	C
1	1	1	1
2	3	4	
3	5	9	8
4	7	16	
5	9	25	
6	11	36	27
7	13	49	
8	15	64	
9	17	81	
10	19	100	64
11	21	121	
12	23	144	
13	25	169	
14	27	196	
15	29	225	125
16	31	256	
17	33	289	
18	35	324	
19	37	361	
20	39	400	
21	41	441	216
22	43	484	
23	45	529	
24	47	576	
25	49	625	
26	51	676	
27	53	729	
28	55	784	343