Afrique / Métropole (Académie de Nantes).

Exercice académique 1 : Diviseurs impairs. **série S**

Éléments de correction :

1.

a. Les entiers qui apparaitront à la place des entiers entre 17 et 32 sont ceux de la somme:
17+9+19+5+21+11+23+3+25+13+27+7+29+15+31+1 =256.

b. S_4= 1+1+3+1+5+3+7+1+9+5+11+3+13+7+15+1= 86
S_5= S_4+256 = 86+256= 342.

2. On peut conjecturer que Les valeurs de d_k pour k compris entre 2^n +1 et 2^{n+1} sont les nombres impairs $1,3,5,\dots,\ 2^{n+1}-1$.

3. On peut conjecturer que $S_{n+1}=S_n+4^n$.

4.

a. On complète la ligne 6 par : *p* prend la valeur *p/*2.

b. $S_n=S_1+4+4^2+...+4^n=2+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=\frac{1}{3}(4^n+2)$ et $S_{16}=1\,431\,655\,766$.

5. Les entiers affichés à la fin du procédé, entre 2^n+1 et 2^{n+1} sont tous impairs et compris entre 1 et $2^{n+1}-1$. Ils sont donc au nombre de $2^{n+1}-2^n=2^n$. Or le nombre d'entiers impairs entre 1 et $2^{n+1}-1$ est aussi 2^n car c'est $(2^{n+1}-1-1)/2+1$.
Montrons que ces entiers impairs sont tous différents. En effet si deux entiers compris entre 2^n+1 et 2^{n+1} ont le même plus grand diviseur impair *d* cela signifie qu'il existe deux entiers *a* et *b* tels que : $2^n+1\le d\times 2^a<d\times 2^b\le 2^{n+1}$ avec $a<b$ donc $a+1\le b$ et par conséquent $2^{n+1}+2\le d\times 2^{a+1}\le d\times 2^b\le 2^{n+1}$ ce qui est absurde. Les entiers de la liste entre 2^n+1 et 2^{n+1} sont donc tous différents. Ce sont donc les nombres $1,3,5,\dots$et $2^{n+1}-1$. (Principe des tiroirs).
Ainsi :

$$\begin{aligned}
S_{n+1}&=S_n+1+3+5+\dots+2^{n+1}-1\\
&=S_n+1+2\times1+1+2\times2+1+2\times3+1+...+2\times(2^n-1)+1\\
&=S_n+2^n+2\times(1+2+3+...+(2^n-1))\\
&=S_n+2^n+2\times\frac{(2^n-1)\times2^n}{2}\\
&=S_n+4^n
\end{aligned}$$

Comme $S_1=2$, on obtient

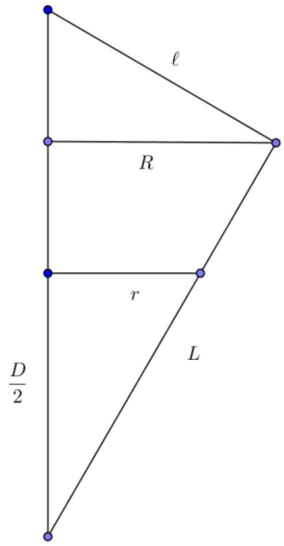
$S_2=2+4^1$; $S_3=2+4^1+4^2$ *et* $S_n=2+4^1+4^2+...+4^{n-1}$

Soit : $S_n=2+4\times\frac{4^{n-1}-1}{4-1}=\frac{2+4^n}{3}$

Afrique / Métropole (Académie de Nantes)

Exercice académique 2 : Crédit revolving. **Série S**

Éléments de correction :



On note ℓ et L les dimensions de la carte.

Sa diagonale : $D = \sqrt{\ell^2 + L^2}$.

Voir le dessin ci-contre :

1. Calcul de R
   Aire d'un triangle rectangle : $\frac{1}{2} \times \ell \times L = \frac{1}{2} \times D \times R$ soit $R = \frac{\ell \times L}{D}$.
2. Calcul de r
   $\tan \widehat{BAC} = \frac{r}{\left(\frac{D}{2}\right)} = \frac{\ell}{L}$ soit $r = \frac{\ell D}{2L}$.
3. Soit V le volume de la carte.

La moitié de V s'obtient en considérant deux cônes de base R et un de base r .

$$\frac{1}{2}V = \frac{1}{3}\pi R^2 D - \frac{1}{3}\pi r^2 \frac{D}{2}$$

$V = \frac{2}{3}\pi D\left(R^2 - \frac{r^2}{2}\right)$; expression qui peut s'écrire uniquement en fonction de ℓ et L .

Application numérique avec $\ell = 5,4$ et $L = 8,6$: $V = 336,72$ cm^3 à 10^{-2} près.

4. On pose $x = \frac{L}{\ell}$ soit $L = \ell x$ ou $\ell = \frac{L}{x}$.

$$D = \ell\sqrt{1+x^2} = \frac{L}{x}\sqrt{1+x^2} \;;\; R = \frac{\ell x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{L}{\sqrt{1+x^2}} \;;\; r = \frac{\ell\sqrt{1+x^2}}{2x} = \frac{L\sqrt{1+x^2}}{2x^2}.$$

On reporte dans l'expression de V :

$$V = \frac{2}{3}\pi\frac{L\sqrt{1+x^2}}{x}\left(\frac{L^2}{1+x^2} - \frac{L^2\left(1+x^2\right)}{2\left(2x^2\right)^2}\right)$$

Soit, après simplification, $V = \frac{\pi L^3}{12} \times \frac{7x^4 - 2x^2 - 1}{x^5\sqrt{1+x^2}}$.

On utilise la calculatrice pour avoir une valeur approchée de l'abscisse du maximum de la fonction $x \mapsto \dfrac{7x^4 - 2x^2 - 1}{x^5\sqrt{1+x^2}}$; on obtient $x_{\max} = 1,058$ à 10^{-3} près soit un format

$x_{\max} = 1,06$ arrondi à 10^{-2} (on peut noter qu'on obtient presque un carré).

Afrique / Métropole (Académie de Nantes)

Exercice académique 3 : Diviseurs impairs. **Séries autres que S**

Éléments de correction :

1.

Les entiers qui apparaitront à la place des entiers entre 17 et 32 sont ceux de la somme :

17+9+19+5+21+11+23+3+25+13+27+7+29+15+31+1 =256.

S_4= 1+1+3+1+5+3+7+1+9+5+11+3+13+7+15+1= 86

S_5= S_4+256 = 86+256= 342.

2. On peut conjecturer que les valeurs de en dernière ligne pour *k* compris entre 2^{15} +1 et 2^{16} sont les entiers impairs $1,3,5,\ldots,\ 2^{n+1}-1$.

3. On peut conjecturer que $S_{16}=S_{15}+1+3+5+\ldots+2^{16}-1.$ soit après calcul : $S_{16}=S_{15}+4^{15}.$

4.

a. On complète la ligne 6 par : *p* prend la valeur *p/*2.

b. $S_n=S_1+4+4^2+\ldots+4^n=2+\sum_{k=1}^{n-1}4^k=\frac{1}{3}(4^n+2)$ et $S_{16}=1\,431\,655\,766$.

5. Les entiers affichés à la fin du procédé, entre 2^n+1 et 2^{n+1} sont tous impairs et compris entre 1 et $2^{n+1}-1$. Ils sont donc au nombre de $2^{n+1}-2^n=2^n$. Or le nombre d'entiers impairs entre 1 et $2^{n+1}-1$ est aussi 2^n car c'est $(2^{n+1}-1-1)/2+1$.

Montrons que ces entiers impairs sont tous différents. En effet si deux entiers compris entre 2^n+1 et 2^{n+1} ont le même plus grand diviseur impair *d* cela signifie qu'il existe deux entiers *a* et *b* tels que : $2^n+1\leq d\times 2^a<d\times 2^b\leq 2^{n+1}$ avec $a<b$ donc $a+1\leq b$ et par conséquent $2^{n+1}+2\leq d\times 2^{a+1}\leq d\times 2^b\leq 2^{n+1}$ ce qui est absurde. Les entiers de la liste entre 2^n+1 et 2^{n+1} sont donc tous différents. Ce sont donc les nombres $1,3,5,\ldots$et $2^{n+1}-1$. (Principe des tiroirs).

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n+1+3+5+\ldots+2^{n+1}-1\\
&=S_n+1+2\times 1+1+2\times 2+1+2\times 3+1+\ldots+2\times(2^n-1)+1\\
&=S_n+2^n+2\times(1+2+3+\ldots+(2^n-1))\\
&=S_n+2^n+2\times\frac{(2^n-1)\times 2^n}{2}\\
&=S_n+4^n
\end{aligned}
$$

Comme $S_1=2$, on obtient

$S_2=2+4^1;$ $\qquad S_3=2+4^1+4^2$ $\qquad$ *et* $\qquad S_n=2+4^1+4^2+\ldots+4^{n-1}$

Soit : $S_n=2+4\times\frac{4^{n-1}-1}{4-1}=\frac{2+4^n}{3}$.

Afrique / Métropole (Académie de Nantes)

Exercice académique 4 : Black Jack. **Séries autres que S**

Éléments de correction :

A. Première règle du jeu :

1. Le joueur obtient tous les entiers de 1 à 6 avec la même probabilité, en moyenne il recevra donc $\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)=3{,}50$ euros, donc en retirant la mise il aura perdu 0,50 euro en moyenne à chaque partie.
2. Avec la stratégie 2, le joueur obtient 2 en obtenant 2 directement (probabilité $\frac{1}{6}$) ou en obtenant 1 puis 1 au deuxième lancer (probabilité $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$)
   D'où une probabilité de $\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$.
3. <u>Stratégie 2 :</u> L'événement obtenir 7 est l'événement obtenir 1 au premier lancer et obtenir 6 au deuxième. D'où une probabilité de 1/36.
   On peut obtenir 2, 3, 4, 5 ou 6 en un ou deux lancers avec la même probabilité de 1/6+1/36=7/36.
   Donc en moyenne il recevra $\frac{1\times7+7\times2+7\times3+7\times4+7\times5+7\times6}{36}=\frac{49}{12}$.
   En retirant la mise, le gain est $\frac{1}{12}$.
   <u>Stratégie 3 :</u> on lance 2 fois le dé.
   Parmi les 36 résultats possibles, 21 donnent un total inférieur ou égal à 7, d'où une probabilité de 7/12 de gagner quelque chose.
   Un lancer donne une somme de 2, 2 lancers donnent 3, 3 lancers donnent 4…
   Donc en moyenne une somme de (1*2+2*3+…+6*7)/36=28/9
   D'où une perte de 8/9 euro par partie une fois la mise retirée.
   <u>Stratégie 4 :</u> la probabilité d'obtenir 3 est 1/216+1/36+1/36+1/6=49/216
   la probabilité d'obtenir 4 est 1/216+1/36+1/36+1/6=49/216 (avec 1+1+2=1+3=2+2=4)
   la probabilité d'obtenir 5 est 1/216+1/36+1/36+1/6=49/216
   la probabilité d'obtenir 6 est 1/216+1/36+1/36+1/6=49/216
   la probabilité d'obtenir 7 est 1/216+1/36+1/36=13/216
   Donc en moyenne (3*49+…+7*13)/216=973/216
   Donc un gain de 109/216 euro par partie une fois la mise retirée.
   <u>Stratégie 5 :</u> pour obtenir 4 : 1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=1+3=2+1+1=2+2=3+1=4
   la probabilité d'obtenir 4 est 1/1296+1/216+1/216+1/36+1/216+1/36+1/36+1/6=343/1296
   pour obtenir 5 : 1+1+1+2=1+2+2=2+1+2=3+2=1+1+3=2+3=1+4=5, la probabilité est 343/1296
   de même la probabilité d'obtenir 6 est 343/1296
   pour obtenir 7 : 1+1+1+4=1+2+4=2+1+4=3+4=1+1+5=2+5=1+6, la probabilité est 127/1296
   Donc en moyenne (4*343+…+7*127)/1296=6034/1296
   Donc un gain de 425/648 euro par partie une fois la mise retirée.

   La stratégie qui donne en moyenne le meilleur gain est la 5.

B. Nouvelle règle :

La mise est de 3 euros et il faut payer 0,50 euro à chaque nouveau lancer de dé.

<u>Stratégie 1 :</u>

Pas de changement, le joueur reçoit toujours 3,50 euro en moyenne par partie, comme il ne relance pas son gain moyen est de 0,50 euro.

<u>Stratégie 2 :</u>

Sans compter la mise :

Lancer 1+1 : on reçoit 2 euros et on paye 0,50, ce lancer rapporte 1,50 euro (probabilité 1/36),
1+2 rapporte 2,50 euros,…, le lancer 2 rapporte 2 euros (probabilité 1/6) ……
Donc en moyenne la partie rapporte 4 euros, soit un gain de 1 euro.
<u>Stratégie 3 :</u> on lance 2 fois le dé, il faut donc payer 3,50 euros à chaque fois au lieu de 4 avec la règle A.
D'où une perte de 8/9-1/2=7/18.
<u>Stratégie 4 :</u> en un lancer on peut obtenir 3,4,5 ou 6, ce qui rapporte (3+4+5+6)/6=18/6
En 2 lancers (on paye 0,50), on peut obtenir : 3,3,4,4,5,5,6,6,7 ou 7 ce qui rapporte
(2,5+2,5+3,5+3,5+4,5+4,5+5,5+5,5+6,5+6,5)/36=45/36
En 3 lancers : 3,4,5,6 ou 7 soit 20/216
Donc en moyenne 469/108
Donc un gain de 145/108 euro par partie une fois la mise de 3 euros retirée.
<u>Stratégie 5 :</u> en un lancer on peut obtenir 4,5 ou 6, ce qui rapporte (4+5+6)/6=15/6
En 2 lancers :4, 4,4,5,5,5,6,6,6,7,7 ou 7 ce qui rapporte
(3,5+3,5+3,5+4,5+4,5+4,5+5,5+5,5+5,5+6,5+6,5+6,5)/36=60/36
En 3 lancers : 4,4,4,5,5,5,6,6,6,7,7 ou 7 soit 54/216
En 4 lancers : 4,5,6 ou 7 soit 16/1296
Donc en moyenne 1435/324
Donc un gain de 463/324 euro par partie une fois la mise de 3,50 euros retirée.

1. Avec la nouvelle règle, la stratégie qui donne en moyenne le meilleur gain est la 5.
2. Quelle que soit la stratégie choisie par le joueur, il a intérêt à opter pour la règle B, pour les stratégies 2 et 3 cela ne change rien, pour les autres la règle B est plus intéressante en moyenne.