MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Afrique – Métropole (académie de Nantes)

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux avant 10 heures.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices académiques

10 h 40 – 12 h 40

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Diviseurs impairs*) et 2 (*Crédit revolving*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 3 (*Diviseurs impairs*) et 4 (*Black Jack*).

Exercice 1 : Diviseurs impairs. (à traiter par les candidates et les candidats de la série S)

Soit n un entier naturel non nul.

On écrit en ligne sur une feuille les entiers naturels k non nuls inférieurs ou égaux à 2^n. On divise successivement chaque nombre pair de la liste par deux, jusqu'à obtenir un nombre impair. On obtient ainsi sous chaque entier k, son plus grand diviseur impair noté d_k.
On note S_n la somme des plus grands diviseurs impairs de tous les entiers compris entre 1 et 2^n.

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de S_n en fonction de n.

Exemple, pour $n = 4$:

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
d_k : le plus grand diviseur impair de k	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	11	3	13	7	15	1

$S_1=2$

$S_2=6$

$S_3=22$

1. En partant de la liste des entiers de 2^3+1 à 2^4 sur la première ligne, on remarque que les entiers qui apparaissent sur la seconde ligne sont : 9, 5, 11, 3, 13, 7, 15 et 1.

   a. Quels entiers apparaîtront dans la seconde ligne, si on part de la liste des entiers de 2^4+1 à 2^5 sur la première ligne ? Calculer leur somme.
   b. En déduire les valeurs de S_4 et S_5.

2. Déterminer l'ensemble des valeurs d_k lorsque l'entier k varie entre 2^n+1 et 2^{n+1}.

3. Conjecturer une relation entre S_{n+1} et S_n.

4. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant :

   n est un entier naturel
   S prend la valeur 0
   Pour k allant de 1 à 2^n **faire**
       p prend la valeur k
       Tant que p est pair **faire**
           p prend la valeur…
       FinTantque
       S prend la valeur $S + p$
   FinPour
   Afficher S

   b. Indiquer le contenu de la variable S en sortie, lorsque n vaut 16.

5. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
   On pourra utiliser les formules suivantes valables pour tout réel q différent de 1 et pour tout entier naturel non nul n **:**

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad 1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Exercice 2 : Crédit revolving. (à traiter par les candidates et les candidats de la série S)

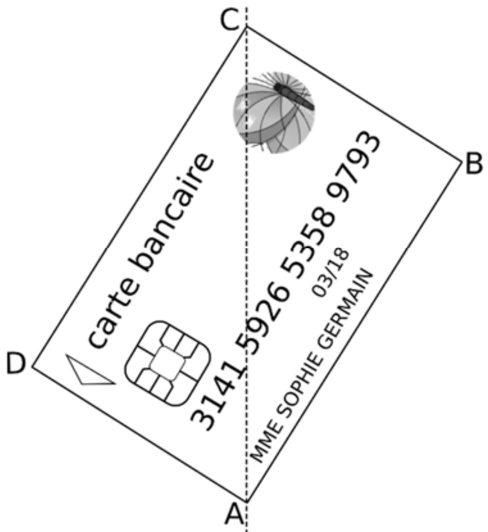
Une carte bancaire est schématisée par un rectangle ABCD de longueur L et de largeur ℓ , exprimées en cm, avec $\ell \leq L$.

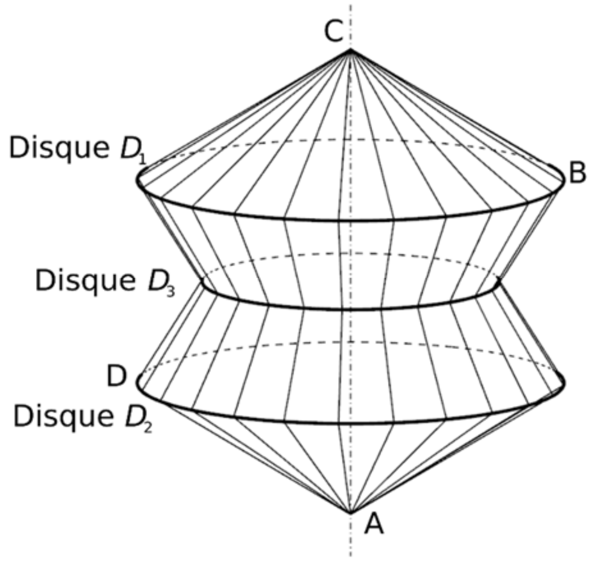
À cette carte bancaire, on associe un volume défini comme suit :

On appelle « volume de carte » le volume, exprimé en cm^3 , du solide de révolution engendré par la rotation de la carte autour de sa diagonale [AC], comme on peut le voir sur la figure de droite ci-dessous.

Le disque D_1 (respectivement le disque D_2) est la section du solide par le plan perpendiculaire à l'axe de révolution (AC) et passant par le point B (respectivement par le point D).

Le disque D_3 est la section du solide par le plan perpendiculaire à l'axe de révolution (AC) et passant par le milieu de [AC].





Un organisme bancaire propose à ses clients de participer à un jeu-concours destiné à dynamiser un produit d'assurance-vie ; il offre l'ouverture d'un compte assurance-vie dotée de la somme exprimée en euro, correspondant au « volume de carte », exprimé en cm^3 , à toute personne qui calculera cette somme, arrondie au centime.

1. Justifier que le rayon R des disques D_1 et D_2 est égal à $\dfrac{\ell \times L}{\sqrt{\ell^2 + L^2}}$.
2. Justifier que le rayon r du disque D_3 est égal à $\dfrac{\ell \times \sqrt{\ell^2 + L^2}}{2L}$.
3. Dans cette question, on considère que $L = 8{,}6$ cm et $\ell = 5{,}4$ cm . Si, en tant que client ou cliente de cet organisme bancaire, vous participiez à ce concours, quelle somme proposeriez-vous ?

Le format d'un rectangle est le rapport $\dfrac{L}{\ell}$, de sa longueur L par sa largeur ℓ , où $\ell \leq L$.

4. Dans cette question, on fixe la longueur L de la carte. Est-il possible de trouver un nouveau format de carte bancaire permettant d'obtenir le « volume de carte » maximal ?

Formule utile : Volume d'un cône = $\dfrac{1}{3} \times$ Aire de la base $\times$ hauteur .

Exercice 3 : Diviseurs impairs. (à traiter par les candidates et candidats des séries autres que S)

Soit n un entier naturel non nul.
On écrit en ligne sur une feuille les entiers naturels non nuls inférieurs à 2^n. On divise successivement chaque nombre pair de la liste par deux, jusqu'à obtenir un nombre impair. On obtient ainsi sous chaque entier, son plus grand diviseur impair.
On note S_n la somme des plus grands diviseurs impairs de tous les entiers compris entre 1 et 2^n.

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de S_n en fonction de n.

Exemple, pour $n = 4$:

Pour $n = 4$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Chaque nombre pair est divisé successivement par deux jusqu'à obtenir un nombre impair		1		2		3		4		5		6		7		8
				1				2				3				4
								1								2
																1
Liste obtenue	1	1	3	1	5	3	7	1	9	5	11	3	13	7	15	1

$S_1=2$

$S_2=6$

$S_3=22$

1. En partant de la liste des entiers de 2^3+1 à 2^4 sur la première ligne, on remarque que les entiers qui apparaissent sur la dernière ligne sont : 9, 5, 11, 3, 13, 7, 15 et 1.
   a. Quels entiers apparaîtront sur la dernière ligne, si on part de la liste des entiers de 2^4+1 à 2^5 sur la première ligne ? Calculer leur somme.
   b. Donner les valeurs de S_4 et S_5.

2. Quels sont les entiers obtenus sur la dernière ligne, pour tout entier k compris entre $2^{15}+1$ et 2^{16} ?

3. Conjecturer une relation entre S_{16} , S_{15} et la somme des entiers impairs $1+3+5+...+2^{16}-1$.

4. **a.** Recopier et compléter l'algorithme suivant.

```
n est un entier naturel
S prend la valeur 0
Pour k allant de 1 à 2^n faire
        p prend la valeur k
        Tant que p est pair faire
                p prend la valeur …
        FinTantque
        S prend la valeur S+p.
FinPour
Afficher S
```

   b. Indiquer le contenu de la variable S en sortie, lorsque n vaut 16.

5. Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.
   On pourra utiliser les formules suivantes valables pour tout réel q différent de 1 et pour tout entier naturel non nul n : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Exercice 4 : Black Jack. (à traiter par les candidates et candidats des séries autres que S)

On étudie un jeu inspiré du Black Jack et on envisage différentes stratégies.

A. Première règle du jeu :

Pour chaque partie le joueur mise 4 euros, lance une ou plusieurs fois un dé équilibré et note le numéro de la face du dessus. La partie s'arrête quand la somme des résultats est strictement supérieure à 7 ou quand le joueur le décide.

Si la somme des résultats obtenus est inférieure ou égale à 7, il reçoit en euros le montant correspondant. Si cette somme est strictement supérieure à 7, il ne reçoit rien.

Exemple 1 : *Le joueur mise 4 €. Au premier lancer il obtient 2. Il décide de relancer et obtient 4 au second lancer. La somme des résultats obtenus vaut 6. Il décide alors de s'arrêter et reçoit 6 €. Son gain net est de 2 €.*

Exemple 2 : *Le joueur mise 4 €. Au premier lancer il obtient 3. Il décide de relancer et obtient 6 au second lancer. La somme des résultats obtenus vaut 9 ; la partie s'arrête et le joueur ne reçoit rien. Il a donc perdu 4 €. Son gain net est de -4 €.*

Le joueur se prépare à jouer un grand nombre de parties et envisage plusieurs stratégies de jeu.

<u>Stratégie 1</u> : il s'arrête après le premier lancer quel que soit le nombre obtenu.

<u>Stratégie 2</u> : il lance le dé une deuxième fois seulement quand il a obtenu 1 au premier lancer.

<u>Stratégie 3</u> : il lance deux fois le dé.

<u>Stratégie 4</u> : il s'arrête dès que la somme atteint au moins 3, il relance sinon.

<u>Stratégie 5</u> : il s'arrête dès que la somme atteint au moins 4, il relance sinon.

1. Justifier qu'avec la première stratégie, le joueur peut espérer recevoir en moyenne 3,50 € par partie et que l'on peut donc considérer le jeu comme défavorable pour le joueur.
2. Justifier qu'avec la stratégie 2, la probabilité d'obtenir une somme égale à 2 est $\frac{7}{36}$.
3. Parmi les cinq stratégies envisagées, indiquez celle qui est la plus intéressante pour le joueur. Justifier.

B. Nouvelle règle :

La mise de départ est de 3 euros et il faut payer 50 centimes d'euro à chaque nouveau lancer de dé, c'est-à-dire à partir du second lancer.

1. Parmi les cinq stratégies proposées précédemment, quelle est, avec cette nouvelle règle, la plus intéressante pour le joueur ?
2. Quelle règle A ou B conseillez-vous au joueur, dans le cadre des cinq stratégies énoncées dans la partie A ? Justifier.