Sujet destiné aux candidats des séries autres que S et SI

Exercice 1:

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2)

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).
Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).
Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.
Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2:

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

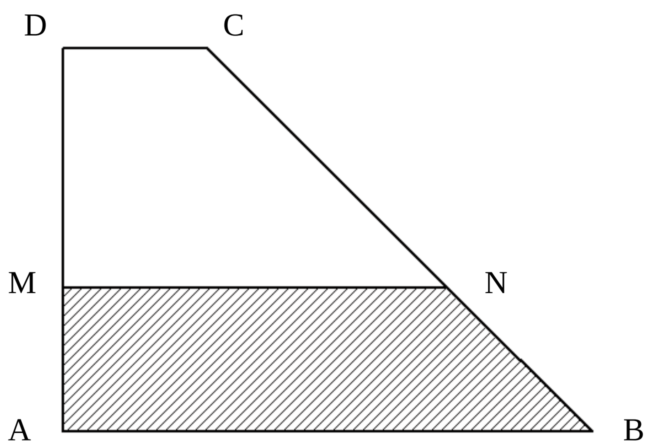
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[\mathrm{AB}]$ et $[\mathrm{CD}]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45°$.
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD>2.

Soit M le point du segment $[\mathrm{AD}]$ tel que $\mathrm{AM} = 2$.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

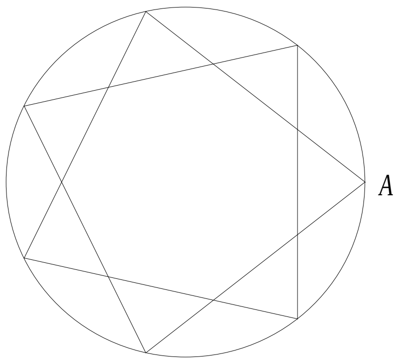
<u>Exercice 3 :</u>

A-polygones réguliers étoilés

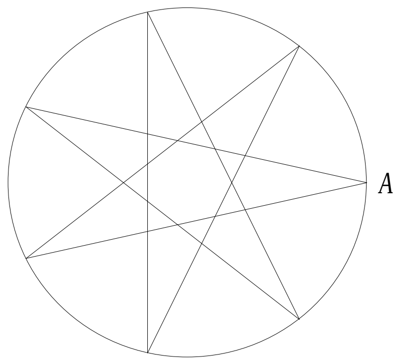
Dans tout cet exercice, on considère un cercle (C) de rayon 5 cm et on note A un point de ce cercle.
Soit n un entier naturel tel que n ⩾ 5.
En partant de A, on partage ce cercle en n arcs de longueurs égales. Ces arcs sont délimités par n points régulièrement répartis (dont fait partie A), qui décrivent un polygone régulier (polygone régulier convexe à n côtés). Parmi les polygones qu'on peut former à l'aide de ces n points, il est le seul dont les côtés ne se coupent pas. Les autres sont dits « croisés ».

*<u>On considère dans toute la suite de l'exercice un polygone croisé formé sur ces n points</u>. On parcourt chacun de ses côtés dans le sens trigonométrique en partant de A. Le passage de chaque sommet au sommet suivant parcourt un certain nombre d'arcs. Dans cet exercice, on s'intéresse au cas où le nombre d'arcs parcourus est le même pour chaque côté, noté p. Un tel polygone est appelé **A-polygone régulier étoilé à n banches d'indice p et noté P(n ; p)**.*

Ainsi, il existe seulement deux A-polygones réguliers étoilés à 7 branches :



$P_A(7;2)$



$P_A(7;3)$

1. Combien y a-t-il de A-polygones réguliers étoilés à 5 branches ? Expliquer soigneusement la réponse. Le(s) tracer avec des instruments de géométrie adaptés.

2. Existe-t-il des A-polygones réguliers étoilés à 6 branches ?

3. Déterminer le nombre de A-polygones réguliers étoilés à 8 branches, à 33 branches, à 41 branches.

4. On suppose que n est un nombre premier et on appelle $\mathscr{E}(n)$ l'ensemble des A- polygones réguliers étoilés à n branches. Quelle est la probabilité qu'un polygone choisi au hasard dans $\mathscr{E}(n)$ ait un indice pair ?

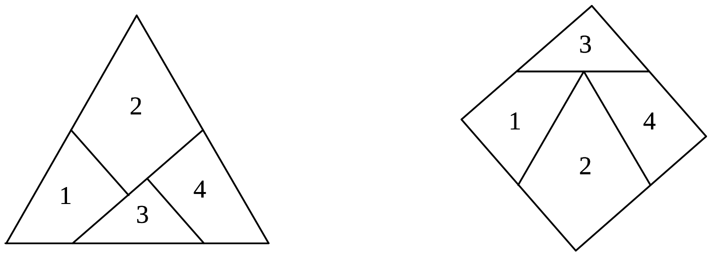
Exercice 4 :

Dissection polygonale

Étant donné un polygone *A*, une *dissection de A* est l’action de découper *A* en polygones plus petits et, dans la mesure du possible, de regrouper les morceaux pour former un nouveau polygone *B* :

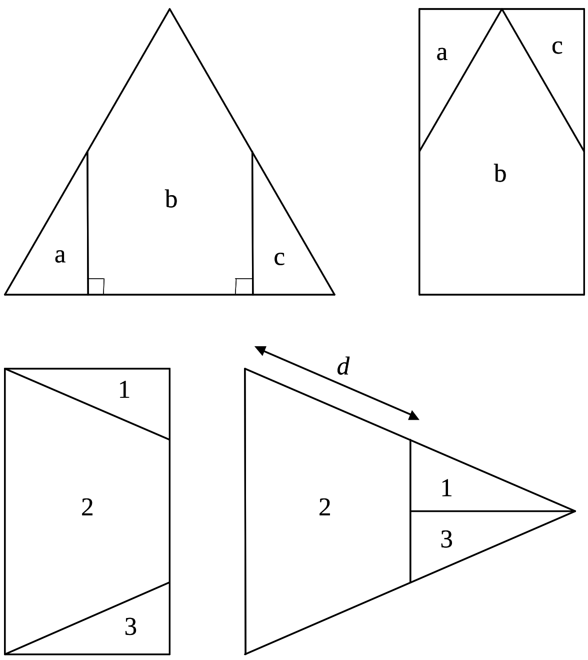
- sans que les morceaux ne se chevauchent
- sans retourner les morceaux (c'est-à-dire, en n'employant que des rotations et des translations)

Pour illustrer cette opération, on montre ci-dessous une dissection permettant de passer d’un triangle équilatéral à un carré. *Cette dissection ne sera pas utilisée par la suite.*



Remarque : par construction, le triangle et le carré de la figure ont *la même aire*.

1. On montre ci-dessous la dissection d’un triangle équilatéral de côté 2 en un rectangle dont un des côtés mesure 1, ainsi que la dissection d’un triangle isocèle particulier *T* en le même rectangle.



   a) Calculer la longueur *d*.
   b) Compléter sur l'annexe la dissection du triangle équilatéral de côté 2 en le triangle *T*. On numérotera les “ pièces ” dans les deux figures. On a indiqué en pointillés la trace du rectangle.

La question 1.b) illustre la propriété suivante, naturelle, qu'on pourra utiliser par la suite sans démonstration :

Étant donnés trois polygones A, B, et C, s'il existe une dissection de A en B et une dissection de B en C , alors il existe une dissection de A en C.

2. On dit que deux polygones sont *équidécomposables* (en abrégé e.d.) s'il existe une dissection permettant de passer de l'un à l'autre.
   On admettra dans cette question :
   - que pour tout triangle, on peut trouver un rectangle qui lui soit e.d. (propriété 1);
   - que pour tout rectangle, on peut trouver un rectangle dont un des côtés mesure 1 et qui lui soit e.d. (propriété 2)

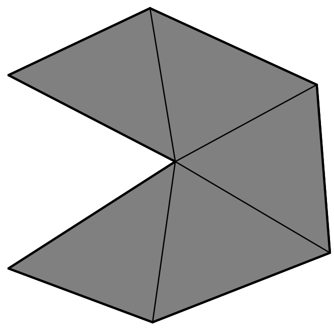
   Propriété :

   Soient :
   - *A un triangle ou un rectangle ;*
   - *B un triangle ou un rectangle.*

   On suppose que A et B ont la même aire. Alors il existe une dissection qui permet de passer de A à B.

   Comment démontrer cette propriété (on pourra commencer par étudier le cas où *A* et *B* sont tous deux des rectangles) ?

3. L'aire totale de la figure ci-contre est 16. Montrer qu'elle est équidécomposable à un carré de côté 4.



Annexe (A remettre avec la copie)