Sujet destiné aux candidats des séries S et SI

Exercice 1:

Un problème de tas

On dispose de 7 objets que l'on répartit en autant de tas que l'on veut, chaque tas contenant autant d'objets que l'on veut.
Une manipulation consiste à enlever un objet de chaque tas et à faire un nouveau tas des objets ainsi récupérés.

Exemple : une répartition possible au départ sera notée (4,3)
elle signifie qu'on a deux tas, l'un de 4 objets et l'autre de 3 objets
après une manipulation, on obtiendra donc la répartition (3,2,2)

Avertissement : on considère que les répartitions (4,3) et (3,4) sont identiques.
De même les répartitions (3,2,2), (2,3,2) et (2,2,3) sont identiques.

1. On place les 7 objets en un seul tas ; la répartition est donc (7).

Quelle répartition obtiendra-t-on après 3 manipulations ? Après 7 manipulations ? Après 11 manipulations ? Après 2007 manipulations ?

2. Ici, on ne connaît pas la répartition initiale, mais après 2007 manipulations, on obtient la répartition (4,2,1).

Indiquer toutes les répartitions initiales possibles.

3. Paul et Virginie jouent ensemble.

Au départ, Paul dispose les objets sans montrer la répartition à Virginie. Puis il simule sur son ordinateur 2007 manipulations et ne montre à Virginie que la répartition finale. Il demande alors à Virginie de deviner la répartition initiale.
Virginie réfléchit et avoue ne pas savoir répondre car elle hésite entre trois répartitions.
Sachant que Virginie a raisonné correctement, quelle répartition finale a-t-elle vue ?

Exercice 2:

Des trapèzes de même aire

Le but de cet exercice est de déterminer les trapèzes rectangles qui, sous certaines conditions de distances et d'angles, sont partagés en deux trapèzes de même aire par une parallèle donnée à leurs bases.

1. Question préliminaire :

Existe-t-il un couple d'entiers naturels (m, p) tel que : $m^2 - p^2 = 8$?

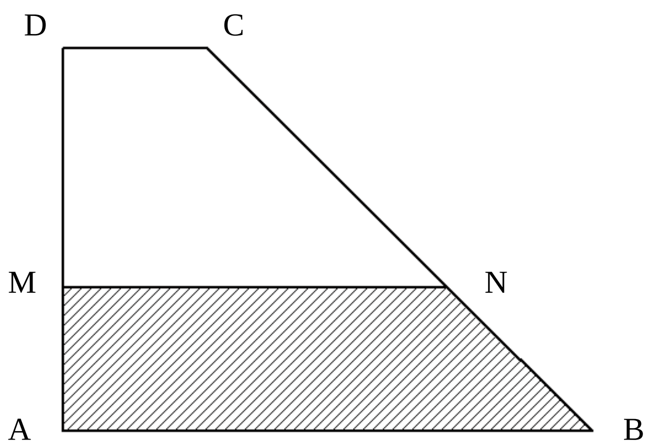
En existe-t-il plusieurs ?

(Le résultat de cette question peut être exploité dans la suite de l'exercice, selon la méthode utilisée pour la traiter).

2. On considère les trapèzes rectangles ABCD de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45°$.
- les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et AD>2.

Soit M le point du segment $[AD]$ tel que $AM = 2$.



Déterminer les distances AB, AD et CD de sorte que les aires des trapèzes MNBA et MNCD soient égales.

Indication : On pourra faire apparaître sur la figure des triangles isocèles.

Exercice 3

Des animaux

Toutes les droites et figures considérées ici sont dans un même plan et les symétries utilisées sont des symétries orthogonales.

Cet énoncé s'accompagne de deux feuilles : la première, intitulée « BROUILLON », permet de réaliser des essais mais les constructions définitives devront être réalisées sur la seconde feuille, nommée « ANNEXE », qui sera donc à remettre avec la copie.

Sur le dessin 1, la figure $\mathcal{F}$ est la figure formée par le rectangle ABCD et le segment [AE].

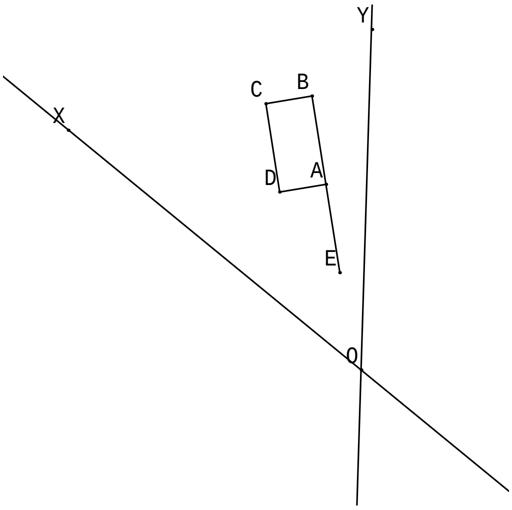
1. Représenter <u>sur le dessin 1 de l'annexe</u> les symétriques $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de la figure $\mathcal{F}$, respectivement par rapport aux deux droites sécantes (OX) et (OY).
2. Quelle transformation permet de passer de la figure $\mathcal{F}_1$ à la figure $\mathcal{F}_2$? Justifier la réponse.

Sur le dessin 2, Yasmina a dessiné un canard (figure $\mathcal{F}$) et deux droites sécantes puis elle a tracé les symétriques $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ de cette figure $\mathcal{F}$ par rapport aux deux droites. Mais le petit Maxime a effacé la figure $\mathcal{F}$ et les deux droites.

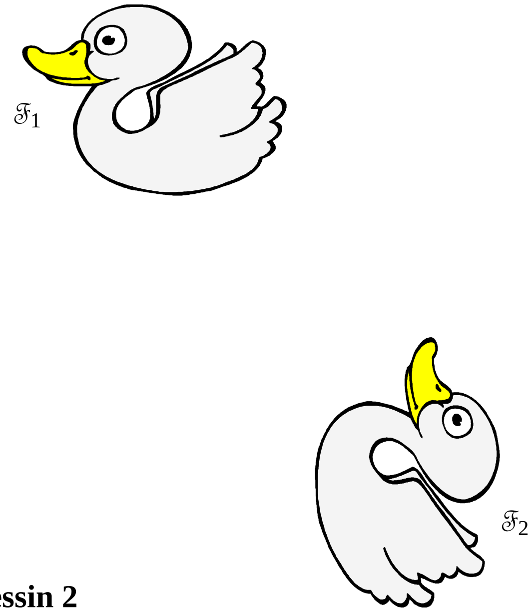
3. Peut-on les retrouver ? Si oui, donner un procédé pour obtenir ces deux droites, les tracer <u>sur le dessin 2 de l'annexe</u>, ainsi que deux points de la figure $\mathcal{F}$ (par exemple, un au bout du bec et l'autre sur une aile) et les deux points correspondants sur chacune des figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

Sur le dessin 3, Simon a dessiné un dauphin et les symétriques de ce dauphin par rapport à trois droites et Maxime a encore sévi.

4. Peut-on retrouver ces trois droites ? Si oui, les construire <u>sur le dessin 3 de l'annexe</u> en laissant apparents les traits de construction et placer le dauphin initialement dessiné par Simon.

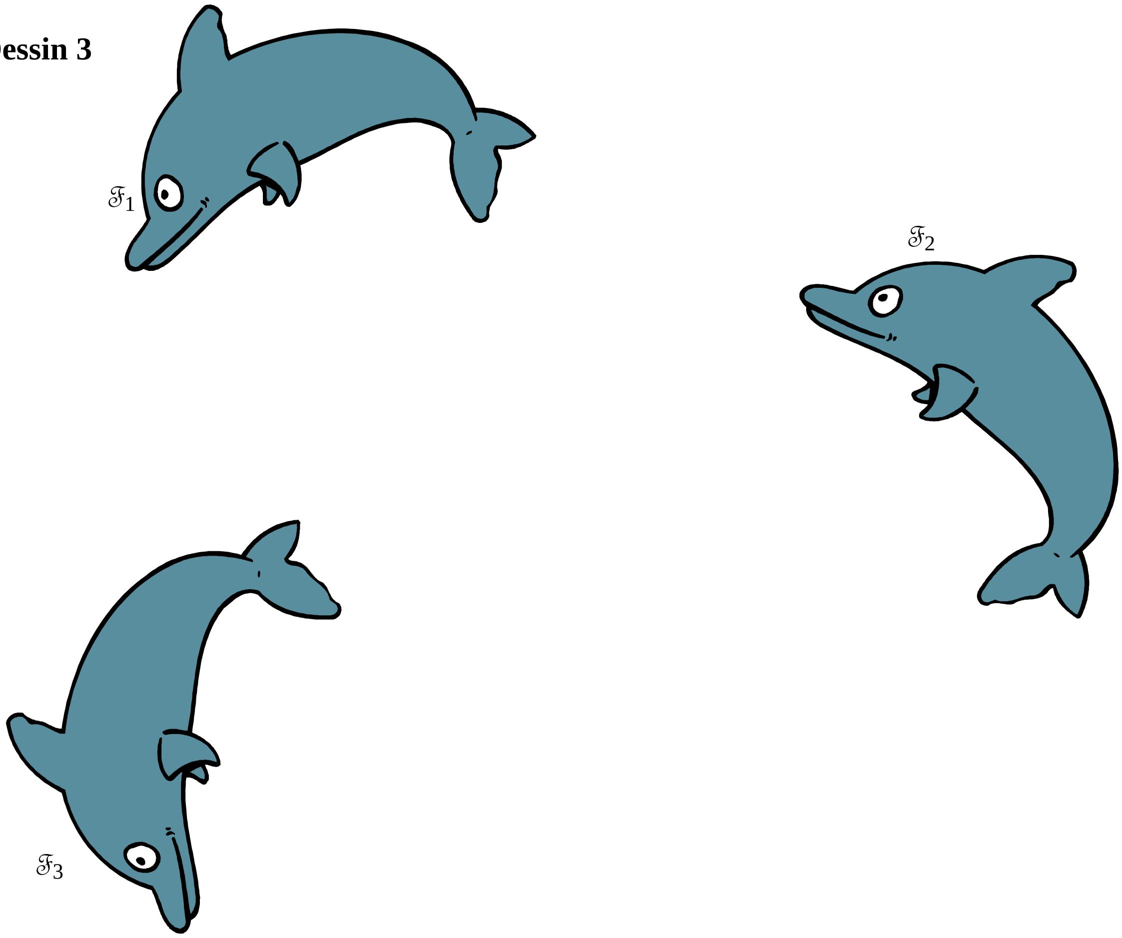


Dessin 1



Dessin 2

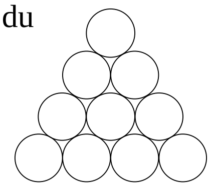
Dessin 3



BROUILLON

Exercice 4

Célestin au travail



Célestin , magasinier dans une grande surface, doit empiler des bouteilles cylindriques d'eau minérale de diamètre 8,4 cm afin de former une « pyramide » construite sur le modèle du dessin.
Son chef de service lui impose une hauteur maximale de 1 mètre.

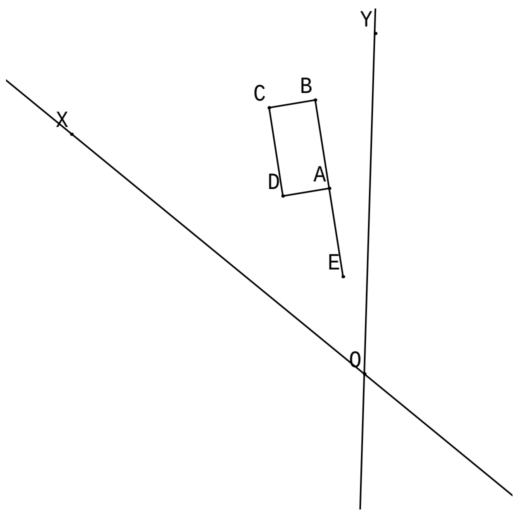
La pyramide terminée, avec toutes les bouteilles, il s'aperçoit que sa hauteur dépasse 1 mètre. Il décide donc de la diviser en deux nouvelles pyramides. Il réussit à les construire de même taille et sur le même modèle.

1. Sachant que Célestin a empilé lors de sa première pyramide moins de 300 bouteilles, combien y a-t-il de bouteilles ?

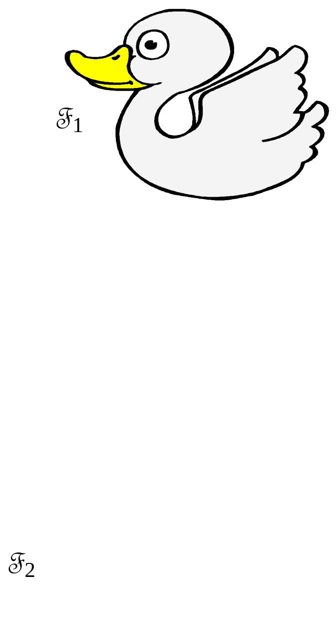
2. La hauteur de chacune des deux nouvelles pyramides remplit-elle la condition de son chef ?

On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+...+n=\sum_{k=1}^{k=n} k=\frac{n(n+1)}{2}$.

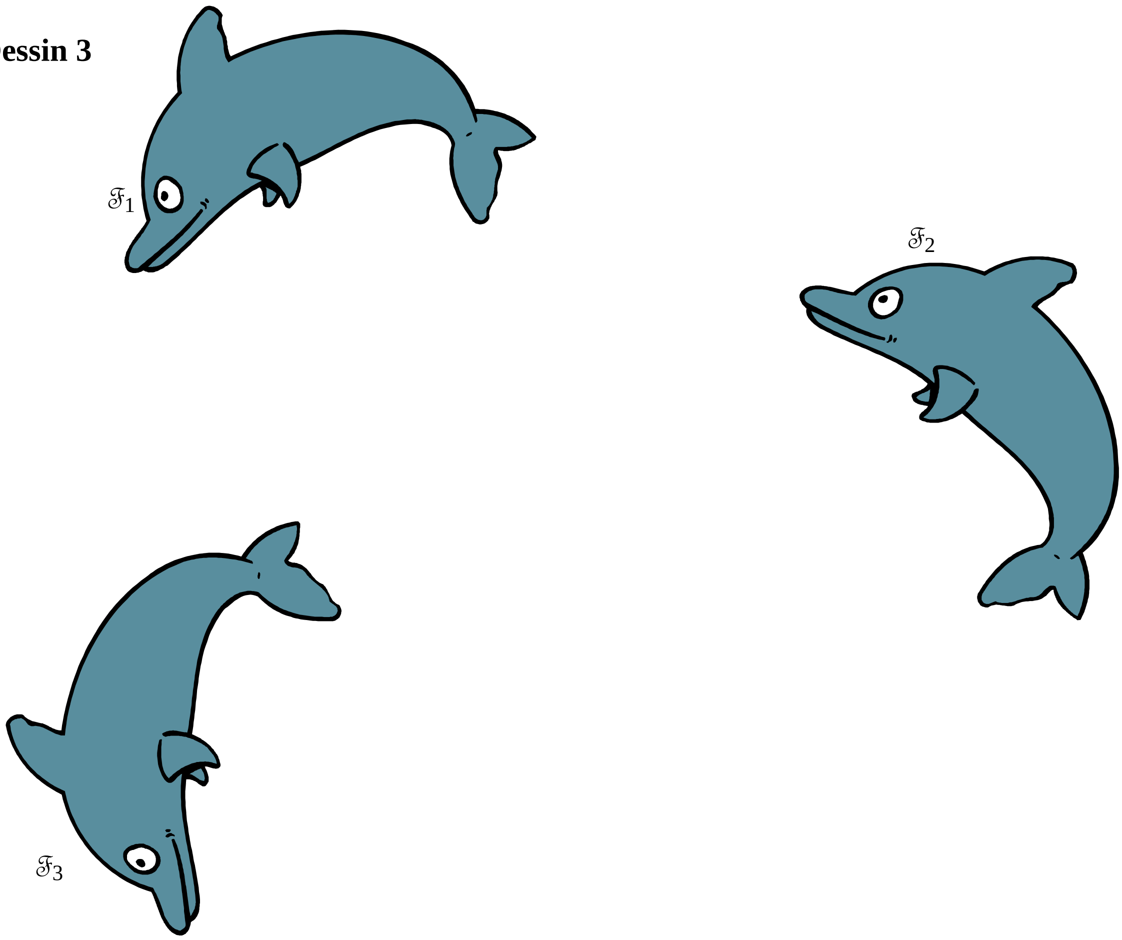


Dessin 1



Dessin 2

Dessin 3



ANNEXE (A remettre avec la copie)