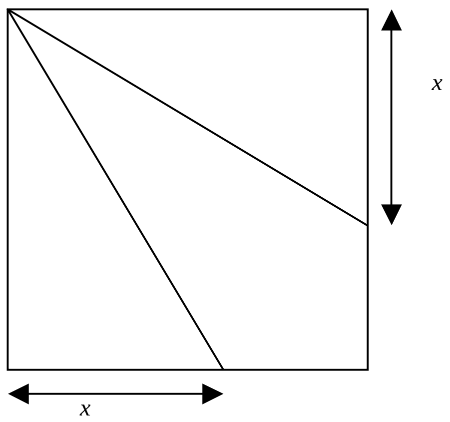
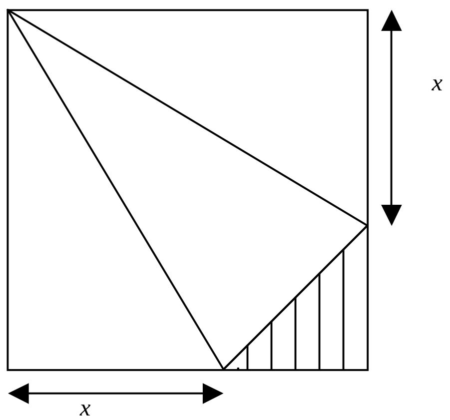
Sujet à destination des candidats des séries S-SVT et S-SI

Exercice 1



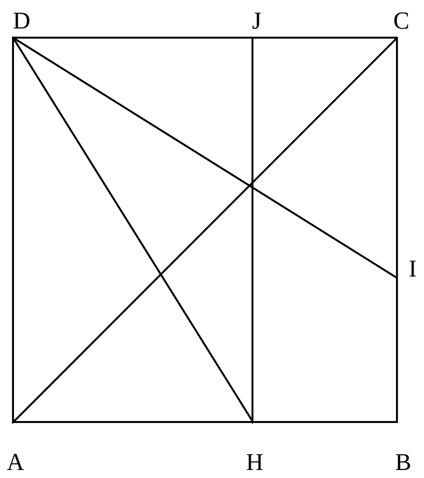
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à *x* pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?



3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).

Il a l’impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu’en est-il ?

Exercice 2

On dit qu’un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s’il peut s’écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu’il est « mauvais » s’il n’est pas « bon ».

Ainsi, par exemple :

$2=1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant 1+1).

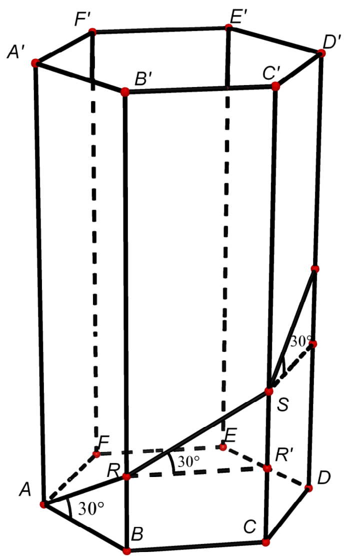
$3=1+2$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$; $3=1+1+1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$; donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s’il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu’en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice 3

1) En collant un fil doré, Chloé veut décorer un vase qui a la forme d'un prisme droit à base hexagonale. La base est un hexagone régulier ABCDEF, les faces latérales sont des rectangles, et la face supérieure est donc également un hexagone régulier, nommé A'B'C'D'E'F'.

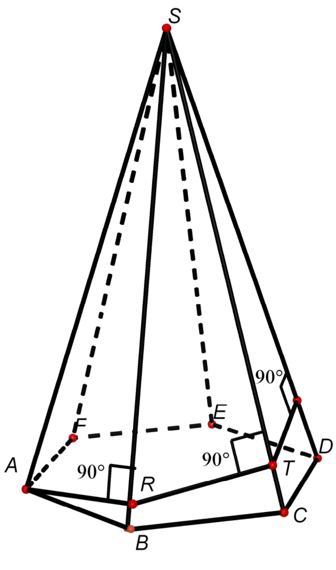
La hauteur du vase est 30 cm et chaque côté de la base mesure 6 cm. Le fil part d'un sommet A de la base et est tendu en faisant un angle de 30° avec l'horizontale ($\widehat{BAR}$ = 30°) et continue sur la face suivante toujours avec un angle de 30° avec l'horizontale ($\widehat{R'RS}$ = 30 °, où R' est le point de [CC'] tel que (RR') // (BC)), etc. Le fil s'arrête dès qu'il atteint le bord supérieur du vase.



a. Quelle est la longueur du fil ?

b. Sur quelle arête du bord supérieur le fil terminera-t-il sa course ?

2) Gaëlle s'attaque à la décoration d'une pyramide régulière à base hexagonale, chaque face latérale est un triangle isocèle en S dont deux des côtés mesurent 30 cm et l'autre 6 cm. Le fil part d'un sommet A de la base et arrive perpendiculairement à l'arête [SB] et continue sur les autres faces avec la même condition d'arrivée sur l'arête suivante, etc. Le fil s'arrête au sommet S.



a. Quelle est la longueur du fil ?

b. Combien de tours fait-il autour de l'axe de la pyramide ?

Exercice 4

Aimé aime bien les maths, et il le fait savoir ! Seulement aujourd'hui, en recevant sa copie corrigée, il n'en mène pas large... Il avait écrit :

$$\frac{9}{3}+\frac{4}{2}=\frac{9+4}{3+2}=\frac{13}{5}$$

et il retrouve son calcul barré de rouge et flanqué de la mention :

Le calcul $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ *n'est jamais correct entre rationnels positifs ou nuls (sauf 0+0).*

1. Vexé, Aimé a pourtant réussi, le soir même, à trouver une égalité correcte $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, et entre rationnels strictement positifs, môsieur ! Et qui plus est, en changeant peu de chose à celle de son devoir. Le professeur est-il faillible ?

Retrouver la relation d'Aimé (ou toute autre relation similaire entre rationnels strictement positifs).

2. Le lendemain, en réfléchissant, Aimé a fini par se dire que le professeur pensait en fait :

« quand *a*, *b*, *c* et *d* sont des entiers naturels ».

Du coup, plutôt que de montrer tout de suite son exemple au professeur, il se dit que sa victoire sera totale s'il trouve un exemple où *a*, *b*, *c*, *d* sont des entiers positifs.

Montrer que si *a, b, c, d* sont des entiers naturels, avec $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, *b* > 0, *c* > 0, *d* > 0, on a toujours : $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

En déduire qu'Aimé ne pourra pas trouver d'exemple.

3. Aimé ne sait pas que c'est impossible. Du coup, il cherche. Il écrit :

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$$

Il calcule ensuite $\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ et constate que le résultat est différent de $\frac{0}{1}+\frac{1}{1}$. Il insère alors $\frac{1}{2}$ à sa place, entre 0 et 1 :

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1}$$

Puis il recommence : entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{2}$, il insère $\frac{1}{3}$ et entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1}$, il insère $\frac{2}{3}$:

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1}$$

Aimé répète ensuite l'opération complète une première fois (il insère $\frac{1}{4}$ entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, etc.), puis une deuxième fois encore. C'est là qu'il prend conscience de l'inégalité du 2., et abandonne.

Écrire la ligne obtenue finalement par Aimé.

4. Le lendemain, Aimé se demande s'il peut obtenir le nombre $\frac{3}{11}$, car il est né un 3 novembre. Comme il n'a plus de place sur sa feuille, il décide de recommencer depuis le début en notant seulement les intervalles [*a*;*b*] où il a une chance de trouver $\frac{3}{11}$:

Il considère l'intervalle [0/1;1/1], et il obtient 1/2.
Parmi les intervalles [0/1;1/2] et [1/2;1/1], il considère l'intervalle gauche (G) [0/1;1/2] et obtient 1/3.
Parmi les intervalles [0/1;1/3] et [1/3;1/2], il considère l'intervalle gauche (G) [0/1;1/3] et obtient 1/4.
Parmi les intervalles [0/1;1/4] et [1/4;1/3], il considère l'intervalle droit (D) [1/4;1/3] et obtient 2/7.
Parmi les intervalles [1/4;2/7] et [2/7;1/3], il considère l'intervalle gauche (G) [1/4;2/7] et obtient 3/11.

Aimé a bien trouvé 3/11 en cinq étapes, avec le codage GGDG.

Quel est le nombre obtenu avec le codage GDGGD ? Quel est le codage de $\frac{11}{18}$?

5. Aimé est convaincu que toute nombre rationnel compris strictement entre 0 et 1 peut être obtenu de cette manière. Essayons de le démontrer.

   a) Il lui semble que les dénominateurs des fractions obtenues augmentent.

Expliquer pourquoi le dénominateur d'une fraction obtenue à la n^e étape est supérieur ou égal à n + 1.

   b) Aimé observe que si $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont les deux extrémités d'un des intervalles considérés, comme par exemple [2/7;1/3], on a toujours :

$$p'q - pq' = 1$$

<u>*On admet ce résultat dans toute la suite*</u>.

Montrer que si *a* et *b* sont deux entiers naturels non nuls tels que $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{p'}{q'}$, alors on a forcément :

$$\boldsymbol{b = b(p'q - pq') \geqslant q + q'}$$

   c) **Démontrer la propriété dont Aimé est convaincu.**