

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE NANTES

SESSION 2006

CLASSE DE PREMIERE : SERIES ES, L, STI ET STT

DURÉE : 4 heures

Le sujet comporte 3 pages.

Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent donc être traités dans l'ordre de votre choix.

Toute démarche clairement présentée, même non aboutie, sera prise en compte.

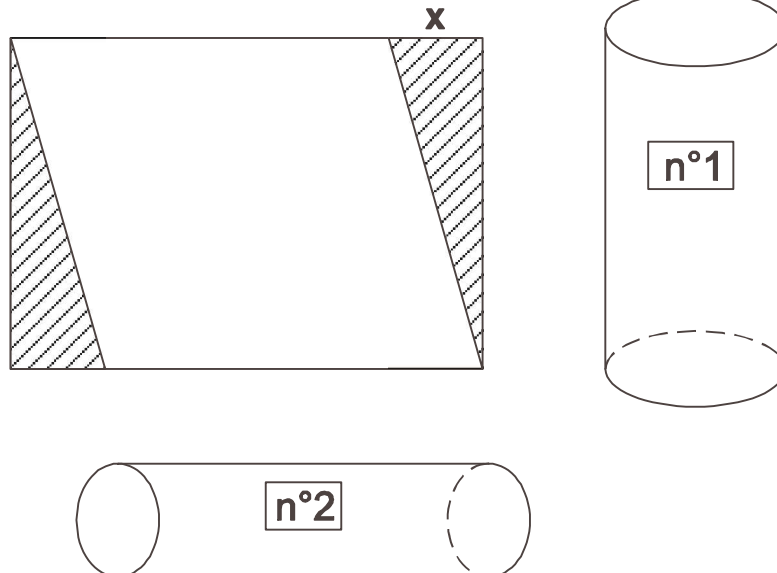
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.

Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 2 : La fête du vélo

Fabrice et Loïc ont participé avec des amis, en juin 2005, à la fête du vélo sur la levée de la Loire.

Le groupe est parti d'Angers et a parcouru à la vitesse de 18 km.h^{-1} la première partie du trajet, qui représente les trois cinquièmes du trajet total.

Le groupe s'est ensuite scindé en deux :

- ⇒ Loïc a pris la tête d'un groupe qui a parcouru la deuxième partie du trajet à la vitesse de 13 km.h^{-1} .
- ⇒ Fabrice, avec le reste de leurs amis, s'est arrêté pour manger des fouées (pains cuits au feu de bois et garnis de rillettes ou de fromage ou de chocolat). La pause a duré le sixième du temps mis par Loïc pour parcourir la deuxième partie du trajet. Le groupe mené par Fabrice est ensuite reparti et est arrivé en même temps que celui mené par Loïc.

1) *Quelle est la vitesse moyenne de Loïc sur l'ensemble du trajet ?*

La comparer à la vitesse moyenne de Fabrice lorsqu'il a parcouru la deuxième partie du trajet.

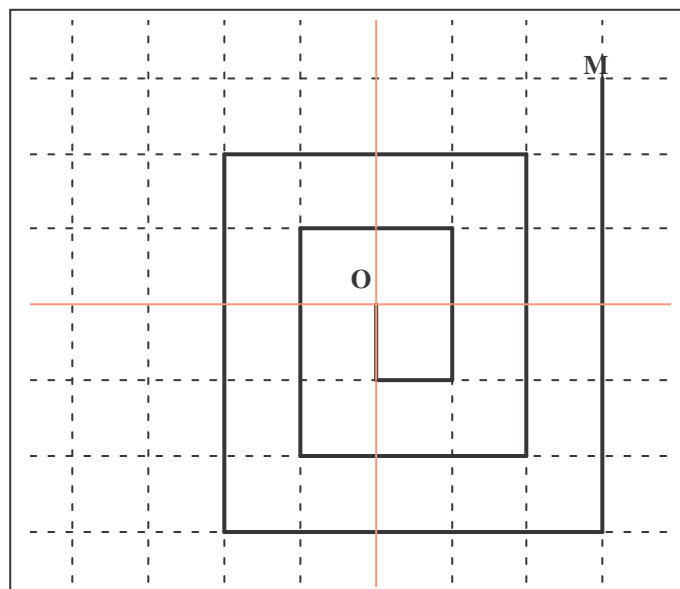
En juin 2005, à la fois membres d'un club de vélo et amateurs non adhérents à un club participaient à cette fête du vélo. La fête a rencontré un vif succès et les organisateurs prévoient pour juin 2006 une augmentation de 2% des participants appartenant à un club de vélo et une augmentation de 8% des participants amateurs. Si cela se réalisait, le nombre de participants à la fête du vélo augmenterait au total de 6%.

2) *Quelle était la répartition des participants (entre membres d'un club et amateurs) en juin 2005*

Exercice 3 : la spirale

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.

Pour tout point M à coordonnées entières, on note $l(M)$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



- 1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA=5$.
Déterminer les valeurs possibles de $l(A)$.
- 2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
Déterminer $l(B)$.
- 3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $l(C)=2006$.
- 4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 4 : les truites

Un pisciculteur propose un jeu à cinq de ses clients.

Il les autorise à aller pêcher des truites autour de son étang pendant une heure mais en leur imposant un règlement très particulier.

- Les pêcheurs ne doivent pas communiquer entre eux ;
- Le nombre de poissons pêchés par chacun d'entre eux ne doit pas être un multiple de cinq.

A la fin du temps réglementaire chacun rapporte ses poissons dans un panier et annonce au pisciculteur le nombre de prises.

Après réflexion, si le pisciculteur réussit, en vidant au moins deux paniers, à répartir leur contenu en cinq parts égales alors les pêcheurs pourront emporter chacun une de ces parts ; le pisciculteur quant à lui gardera les truites des paniers non vidés.

Les pêcheurs risquent-ils de rentrer chez eux bredouilles ?