OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2010

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES NON SCIENTIFIQUES

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

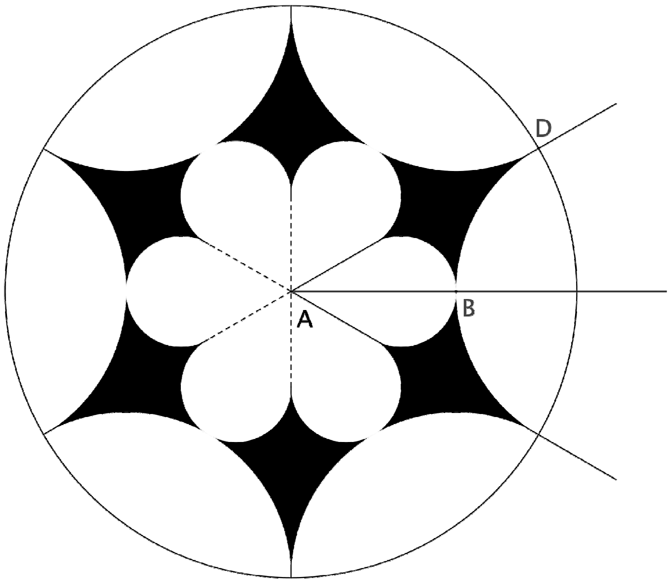
Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Le palmarès académique sera établi en fonction de la prestation du candidat dans les quatre exercices.
Le palmarès national tiendra prioritairement compte (mais non exclusivement) de la prestation du candidat dans les deux premiers exercices (dits exercices nationaux).

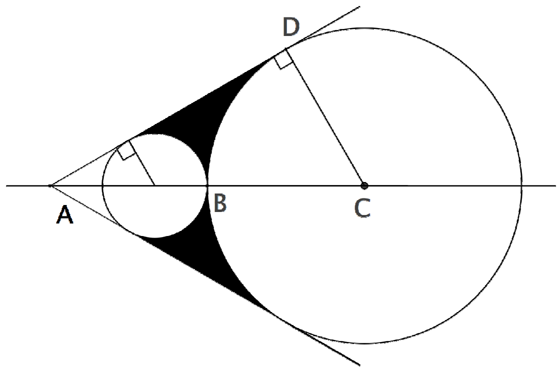
Exercice 1 (exercice national)

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que AB = BC.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.
   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice 2 (exercice national)

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :

« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».

Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle ***chaînonze*** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « a a ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

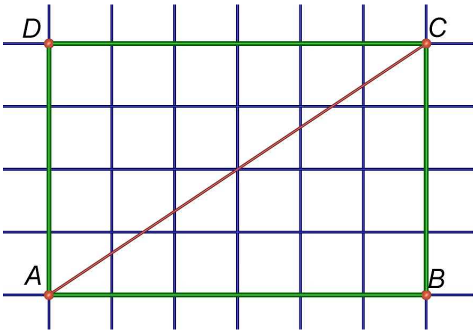
Exercice 3 (exercice académique)

a et *b* sont deux entiers naturels non nuls.

Sur une feuille quadrillée, on représente un rectangle ABCD de côtés *a* et *b* selon les lignes du quadrillage.

Ensuite, on trace la diagonale [AC] de ce rectangle et on note N(*a*, *b*) le nombre de carreaux qu'elle traverse.

Ainsi, N(4, 6) = 8



1. Donner les valeurs de N(2, 3), N(2, 4), N(3, 4), N(3, 6), N(5, 7) et N(8, 12).

2. *a.* Déterminer N(1, *b*).

   b. Que vaut N(2, *b*) lorsque *b* est impair ? Et lorsque *b* est pair ?

   c. *k* étant un entier naturel non nul, trouver une relation entre N(*k*, *kb*) et N(1, *b*).

3. Dans cette question, on suppose que $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible, c'est à dire que *a* et *b* sont premiers entre eux.

   a. Déterminer N(*a*, *b*) en fonction de *a* et *b*.

   b. *k* étant un entier naturel non nul, exprimer N(*ka*, *kb*) en fonction de *a*, *b* et *k*.

4. Calculer N(1500, 2010).

5. Déterminer N(*a*, *b*) dans le cas général.

Exercice 4 (exercice académique)

Deux joueurs disposent chacun d’un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Ils jettent leur dé ensemble, ce qui constitue **un lancer**.

Si les numéros sont égaux, on dit que le **lancer est nul**, sinon, celui qui a sorti le numéro le plus grand marque un point.

La partie s’arrête lorsque l’un des joueurs est arrivé à 10 avec au moins deux points d’écart, sinon, la partie continue jusqu’à ce qu’il y ait deux points d’écart.

Les cinq questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. Jean et Etienne ont fait une partie qui s’est terminée sur le score de 14 à 12 en faveur d’Etienne.

   a. Jean affirme avoir lancé 20 fois son dé. Qu’en pensez-vous ?
   b. En fait, chacun a jeté son dé 28 fois. Combien y a-t-il eu de lancers nuls ?
   c. Quel était le score de Jean au $26^{\text{ème}}$ lancer ?

2. Jean a gagné la partie avec un score de 10 à 6. Jean et Etienne additionnent chacun les numéros qu’ils ont obtenus lors de leurs lancers successifs et Etienne constate alors que, malgré sa défaite, la somme de ses numéros dépasse celle de Jean.

   L’écart entre leurs sommes respectives peut-il être de 22 ?

3. Au cours d’une partie, le score était de 10 à 9 en faveur de Jean. Les lancers suivants ont tous été gagnants et finalement, Etienne l’emporte en moins de 35 lancers.

   Sachant que le nombre de lancers nuls représente exactement un cinquième des lancers, quel est le score final ?

4. Lors d’une partie, Jean et Etienne ont fait moins de 30 lancers. Ils constatent que le nombre de lancers et le score de chacun sont des nombres premiers.

   Montrer que le nombre de lancers nuls est aussi un nombre premier et le déterminer.

5. Jean a gagné sur le score de 10 à 6.
   En faisant la moyenne des numéros qu’il a sortis sans les lancers nuls, Jean trouve 4,25 et avec les lancers nuls 4,1. Etienne, quant à lui, trouve 4 sans les lancers nuls et 3,9 avec les lancers nuls.

   Quel a été le nombre de lancers nuls au cours de la partie et quelle a été la moyenne des lancers nuls ?