OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2009

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES NON SCIENTIFIQUES

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

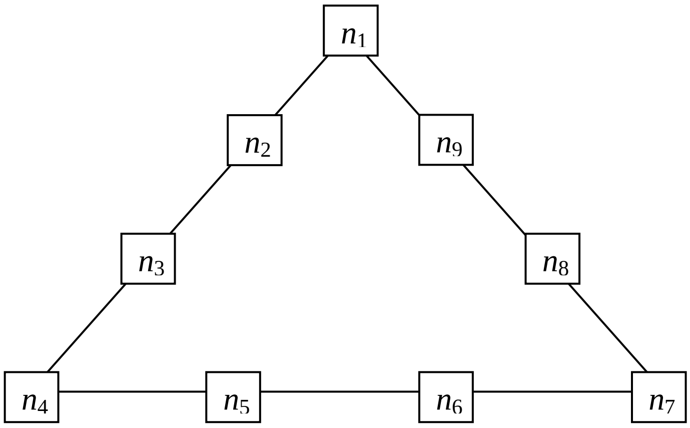
Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.
1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2- Quelle est la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

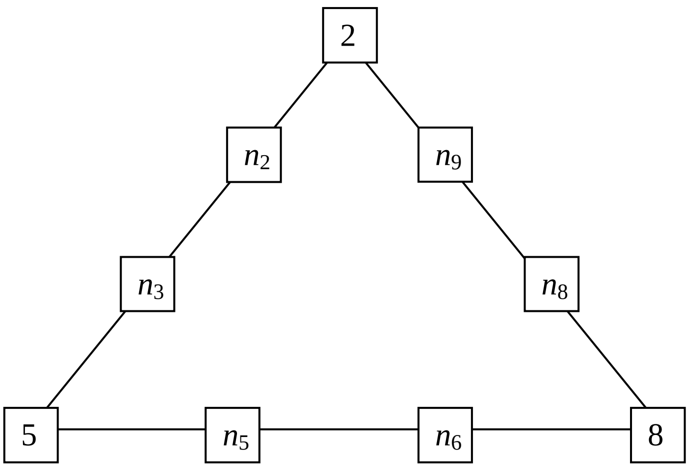


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
c. Donner la liste des couples $(S\ ,\ T)$ ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- a. Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8.
Calculer la longueur du coté du losange.

3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3

Dans un pays ne circulent que des pièces de **1; 3; 9; 27** et **81** euros.
Tous les prix sont des nombres entiers d'euros.

On appellera *paiement*, tout achat réalisé à l'aide de ces pièces sans rendu de monnaie.
On appellera *transaction*, tout achat effectué à l'aide de ces pièces avec un rendu éventuel de monnaie.

1- De combien de façons différentes peut-on effectuer un paiement de 21 € ?

2- Donner une façon d'effectuer un paiement de 183 euros. Quelle est celle qui utilise le moins de pièces ?

3- Montrer que tout paiement peut être effectué en utilisant des pièces de 81 € et, au plus, deux pièces de 27 €, deux pièces de 9 €, deux pièces de 3 € et deux pièces de 1 €.

4- On dit qu'une personne possède un *jeu* lorsqu'elle possède une et une seule pièce de chaque valeur.

- **a.** Déterminer tous les paiements qu'une personne possédant un jeu peut effectuer. Peut-elle effectuer le paiement d'un objet valant 11 euros ?
- **b.** Deux personnes possédant chacune un jeu se rencontrent. Peuvent-elles réaliser une transaction de 11 euros ?
- **c.** Quel est le montant maximal d'une transaction entre ces deux personnes ? Montrer qu'elles peuvent réaliser toute transaction dont le montant est inférieur à ce nombre.

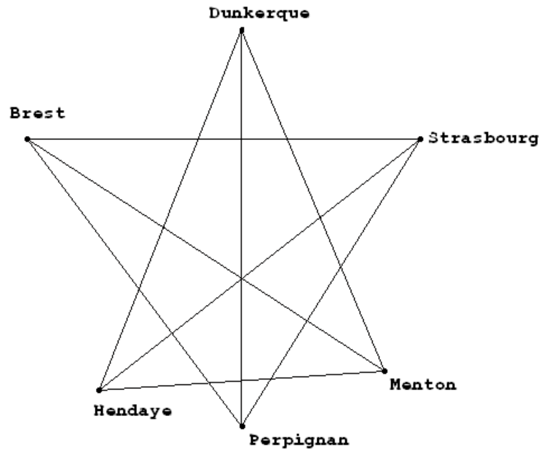
Exercice 4

« Quelques centaines d'opiniâtres traversent la France de long en large, à la pédale et au courage » Ouest-France du 07-08 juin 2008.

Un diagonaliste est un amateur de vélo qui a réussi à joindre deux des six sommets de l'hexagone que sont Brest, Dunkerque, Strasbourg, Menton, Perpignan et Hendaye, en parcourant uniquement des diagonales.
Le tableau donne les diagonales et leurs distances en km.

Diagonales	Distances
Dunkerque-Menton	1 190
Hendaye-Menton	940
Hendaye-Strasbourg	1 170
Brest-Strasbourg	1 080
Brest-Menton	1 400
Brest-Perpignan	1 065
Dunkerque-Hendaye	1 050
Dunkerque-Perpignan	1 190
Strasbourg-Perpignan	940

Alex et Sam, sportifs et mathématiciens, ont construit le graphe ci-dessous schématisant les diagonales reliant les six villes.



Les quatre questions de ce problème sont indépendantes

1- Peut-on parcourir une fois et une seule toutes les diagonales sans lever le crayon ? Expliquer.

2- Alex et Sam souhaitent relier Dunkerque à Strasbourg. Est-ce possible directement ? avec 2 diagonales ? avec 3 ? avec 4 ? avec 5 ? avec 6 ?

Donner dans chaque cas où cela est possible, un trajet envisageable (une diagonale ne peut être parcourue qu'une seule fois) et sa distance en kilomètres.

3- L'été prochain, ils décident de faire une boucle au départ de Dunkerque en faisant une première étape à Menton, avec 5 diagonales distinctes.

Quels sont tous les trajets possibles ? Quel est le trajet le plus court ?

4- Pour embellir le graphe, ils décident de mettre les villes en couleur, de sorte que deux villes reliées par une diagonale ne soient pas de la même couleur. Quel est le nombre minimal de couleurs ? Reproduire le graphe en colorant les villes avec les couleurs choisies.