**Académie de Nantes** **Session 2011**

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES

# DE MATHÉMATIQUES

***SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES NON SCIENTIFIQUES***

**Une annexe est à rendre avec la copie.**

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

L'utilisation de tout autre document est interdite.

*Lors de l'examen de la copie, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.*

## Exercice 1 *(exercice national)*

*Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.*

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que OA = 15 cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au $cm^2$ près.

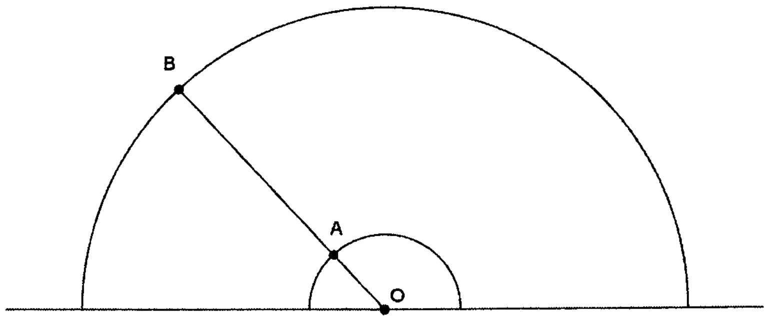



Fig. 1

Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur R, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que OO' = R (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO').
Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

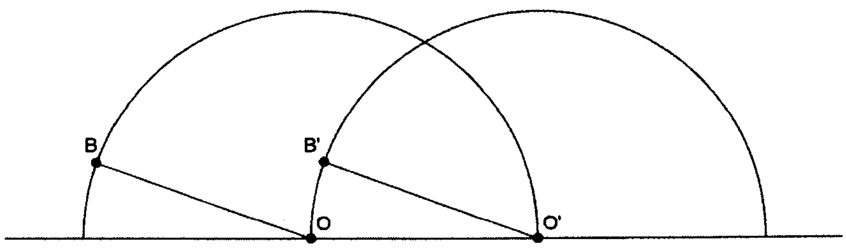



Fig. 2

Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4\ CA$ et $OC = \sqrt{3} \times CA$. On pose $CA = a$.

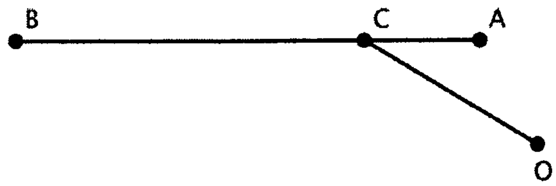



Fig. 3

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.
b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de $a$ l'aire de la surface essuyée par le balai.

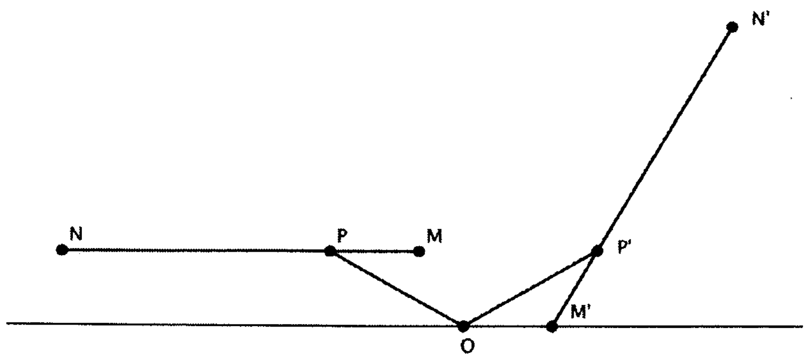


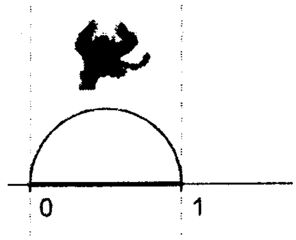

Fig. 4

## Exercice 2 *(exercice national)*

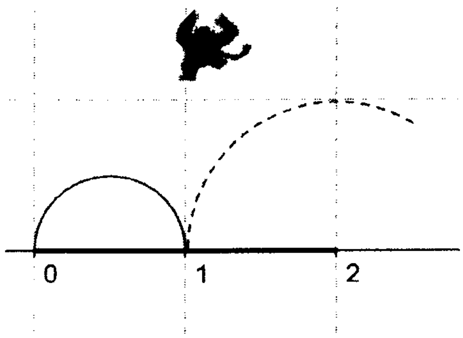
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre $n$ est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse $n$ en **exactement** $n$ bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2, …, $n$ (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0\ ;\ n]$.

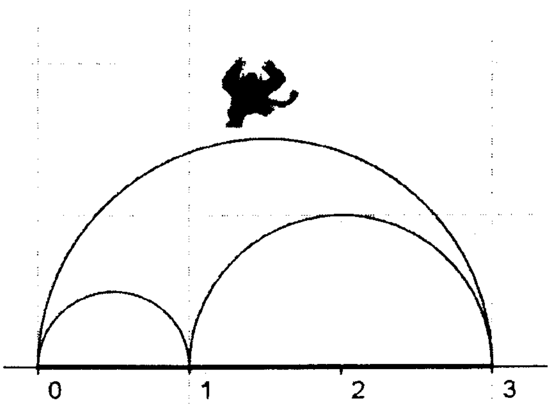
*Par exemple* : Le nombre 1 est atteignable en un bond.




Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 2]$.




Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\ ;\ 3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.

2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier $m$, on a : $1+2+3+....+m=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.

5.
   a. Montrer que si le nombre entier $n$ est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier $n$ pour qu'il soit atteignable.
   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?

6. On suppose $N \geq 6$ et atteignable par une séquence qui commence par 1+2+3 …
   Montrer que N+4 est aussi atteignable.

## **Exercice 3** *(exercice académique)*

On dit qu'un nombre entier naturel est sympathique si tous ses chiffres sont différents et s'il est multiple de la somme de ses chiffres.

Par exemple, 24 est sympathique car $24 = 4 \times (2 + 4)$, mais 14 ne l'est pas car 14 n'est pas multiple de $1 + 4$.

1) Recopier le tableau ci-dessous et entourer tous les nombres sympathiques qui y sont présents.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |

2) Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux nombres entiers à trois chiffres.

   a) Quel est le plus petit nombre sympathique à trois chiffres ? Le plus grand ?

   b) Quels sont les nombres sympathiques à trois chiffres dont la somme des chiffres est 6 ?

   c) On considère un nombre à trois chiffres distincts, multiple de 9. Quelles sont les valeurs possibles de la somme de ses chiffres ? Ce nombre est-il sympathique ?

3) Nombres sympathiques à quatre, cinq ou dix chiffres.

   d) Peut-on avoir un nombre sympathique à quatre chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4 ?

   e) Peut-on avoir un nombre sympathique à cinq chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?

   f) Quels sont les nombres sympathiques à dix chiffres ?

4) On choisit un nombre sympathique à trois chiffres et on le divise par la somme de ses chiffres.

   Quelle est la plus grande valeur du quotient que l'on peut obtenir dans ce cas ?

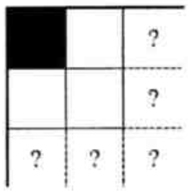
## Exercice 4 *(exercice académique)*

Soit $c$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. Une grille $c \times c$ est un carré constitué de $c^2$ cases que l'on recouvre de carreaux noirs ou blancs en suivant les règles ci-dessous :

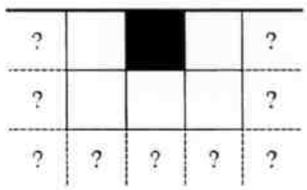
- $R_1$ : chaque case de la grille doit être recouverte d'un seul carreau (à choisir entre noir et blanc) ;
- $R_2$ : deux carreaux noirs ne peuvent être en contact que ce soit par un côté ou par un sommet ;
- $R_3$ : un carreau blanc doit toujours être en contact avec un et un seul carreau noir (par un côté ou par un sommet).

On considère les trois configurations suivantes :

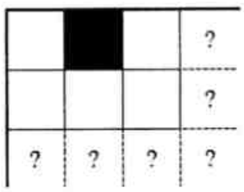
- carreau noir en coin. Par exemple :



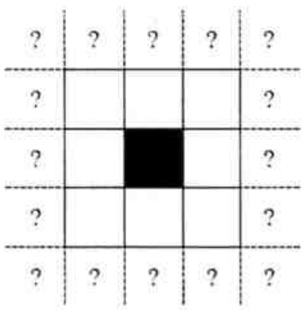
- carreau noir en bordure (la situation en coin est exclue). Par exemple :



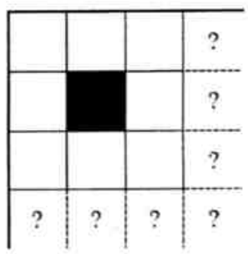
ou



- carreau noir immergé. Par exemple :



ou



**1) Grille 5×5.**

On propose ci-dessous trois dispositions :

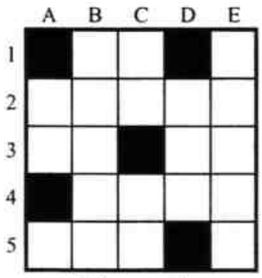


Figure 1

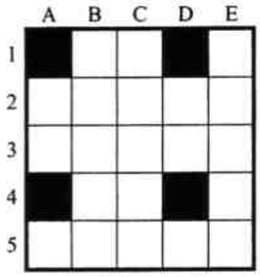


Figure 2

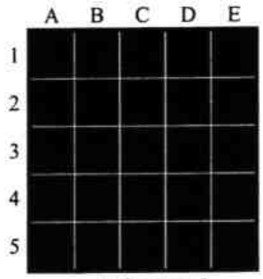


Figure 3

Indiquer pour chaque figure représentée si elle respecte les règles énoncées et préciser, lorsque ce n'est pas le cas, la règle non respectée.

**2) Grille 3×3.**

Représenter toutes les dispositions possibles permettant de recouvrir une grille 3×3.

**3) Grille 7×7.**

Le nombre de carreaux noirs en coin utilisés pour recouvrir la grille 7×7 est noté $n$, celui des carreaux noirs en bordure est noté $p$ et celui des carreaux noirs immergés est noté $q$.

Le but de cette partie est de déterminer les triplets $(n ; p ; q)$ qui permettent de recouvrir la grille donnée.

Des grilles 7×7, que vous pourrez rendre avec la copie, sont données en annexe pour tester des configurations.

a) Justifier que : $4n + 6p + 9q = 49$.

b) Démontrer que les cas $n = 0$, $n = 2$ et $n = 3$ sont impossibles.

c) En déduire les triplets d'entiers naturels $(n ; p ; q)$ solutions de l'équation :

$4n + 6p + 9q = 49$.

d) Montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet permettant de résoudre le problème.
Illustrer ce cas par une figure.

**Document annexe de l'exercice 4 – A rendre avec la copie**

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | |