OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2010

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES SCIENTIFIQUES (S-SVT et S-SI)

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

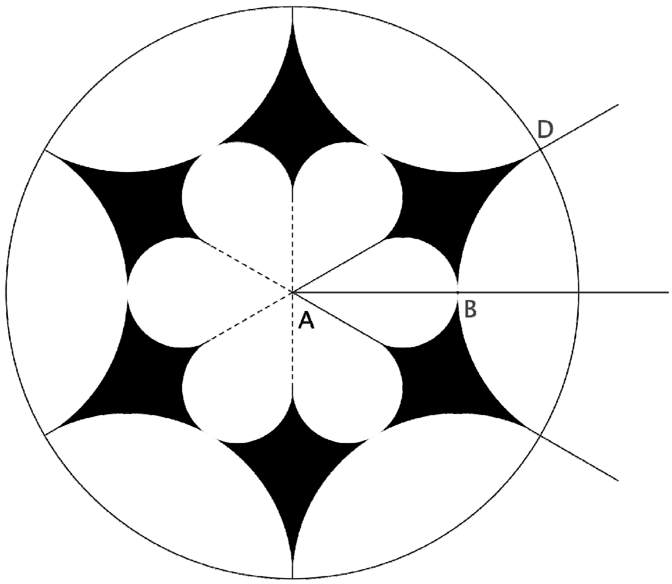
Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Le palmarès académique sera établi en fonction de la prestation du candidat dans les quatre exercices.
Le palmarès national tiendra prioritairement compte (mais non exclusivement) de la prestation du candidat dans les deux premiers exercices (dits exercices nationaux).

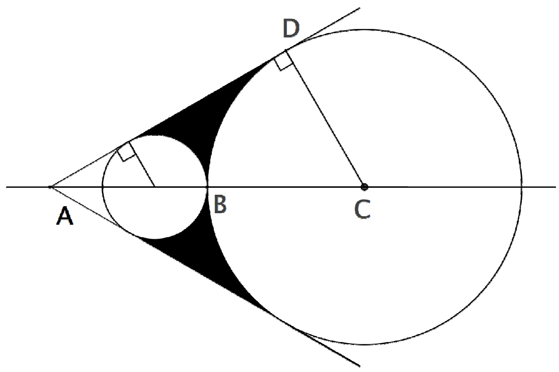
Exercice 1 (exercice national)

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que AB = BC.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.
   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Exercice 2 (exercice national)

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :

« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».

Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle ***chaînonze*** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « a a ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Exercice 3 (exercice académique)

Dans tout l'exercice, on pourra se référer à la table des nombres premiers donnée en fin d'énoncé.

On considère le programme de calcul suivant :

a. Choisir un entier naturel *b. L'élever au carré* *c. Ajouter au résultat le nombre initialement choisi* *d. Ajouter 17*

1. Montrer que, si on applique ce programme de calcul à tout entier naturel compris entre 1 et 15, le résultat obtenu est un nombre premier.
   Cette propriété est-elle vérifiée pour tout entier naturel choisi au départ ? Justifier.

2. En appliquant ce programme de calcul, on a obtenu 773. Quel nombre a-t-on choisi au départ ?

3. X désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

   Si, en remplaçant dans l'instruction *d.* « Ajouter 17 » par « Ajouter X », on obtient un nombre premier en appliquant le programme de calcul à tout entier naturel compris entre 1 et X – 2, on dit que X est **un nombre chanceux**. Ainsi, d'après la question 1., 17 est un nombre chanceux.

   a. Vérifier que 3, 5, 11 sont des nombres chanceux et que 7 et 13 ne le sont pas.

   b. Montrer que tout nombre chanceux est impair.

   c. L'objectif de cette question est de prouver que si X est un nombre chanceux, alors il est nécessairement premier.

   Soit X un nombre chanceux. On suppose qu'il n'est pas premier, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels Y et Z supérieurs ou égaux à 2 tels que X = YZ. Montrer alors que Y ⩽ X – 2 puis conclure.

   d. Montrer que si X est chanceux, alors X + 2 est premier.

4. Il a été démontré en 1967 qu'il n'existait que cinq nombres chanceux. Les quatre premiers sont 3, 5, 11 et 17. Déterminer le cinquième sachant qu'il est inférieur à 50.

Table des 300 premiers nombres premiers

2	73	179	283	419	547	661	811	947	1087	1229	1381	1523	1663	1823
3	79	181	293	421	557	673	821	953	1091	1231	1399	1531	1667	1831
5	83	191	307	431	563	677	823	967	1093	1237	1409	1543	1669	1847
7	89	193	311	433	569	683	827	971	1097	1249	1423	1549	1693	1861
11	97	197	313	439	571	691	829	977	1103	1259	1427	1553	1697	1867
13	101	199	317	443	577	701	839	983	1109	1277	1429	1559	1699	1871
17	103	211	331	449	587	709	853	991	1117	1279	1433	1567	1709	1873
19	107	223	337	457	593	719	857	997	1123	1283	1439	1571	1721	1877
23	109	227	347	461	599	727	859	1009	1129	1289	1447	1579	1723	1879
29	113	229	349	463	601	733	863	1013	1151	1291	1451	1583	1733	1889
31	127	233	353	467	607	739	877	1019	1153	1297	1453	1597	1741	1901
37	131	239	359	479	613	743	881	1021	1163	1301	1459	1601	1747	1903
41	137	241	367	487	617	751	883	1031	1171	1303	1471	1607	1753	1913
43	139	251	373	491	619	757	887	1033	1181	1307	1481	1609	1759	1931
47	149	257	379	499	631	761	907	1039	1187	1319	1483	1613	1777	1933
53	151	263	383	503	641	769	911	1049	1193	1321	1487	1619	1783	1949
59	157	269	389	509	643	773	919	1051	1201	1327	1489	1621	1787	1951
61	163	271	397	521	647	787	929	1061	1213	1361	1493	1627	1789	1973
67	167	277	401	523	653	797	937	1063	1217	1367	1499	1637	1801	1987
71	173	281	409	541	659	809	941	1069	1223	1373	1511	1657	1811	1993

Exercice 4 (exercice académique)

Soit *n* un entier supérieur ou égal à 3 et **k un réel supérieur ou égal à 1**.

Un polygone à *n* côtés est dit **k-progressif** lorsqu'il admet des côtés consécutifs dont les longueurs respectives $a_1, a_2, \dots, a_n$ vérifient la propriété suivante : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = k$.

1. Etude des triangles k-progressifs

   a. Qu'est-ce qu'un triangle 1-progressif ?

   b. Construire un triangle 1,5-progressif dont le plus petit côté a pour longueur 10 cm.

   c. Un triangle peut-il être 1,7-progressif ? Pourquoi ?

   d. Pour quelles valeurs de k existe-t-il un triangle k-progressif ?

   e. Existe-t-il des triangles k-progressifs rectangles ?

2. Etude des quadrilatères k-progressifs

   a. Construire un quadrilatère 1,7-progressif.

   b. Un quadrilatère peut-il être 1,9-progressif ? Pourquoi ?

   c. On a construit un quadrilatère k-progressif. Quelle inégalité est nécessairement vérifiée par k ?

   d. Déduire de cette inégalité la plus petite valeur décimale de k, écrite avec deux décimales, pour laquelle il n'existe pas de quadrilatère k-progressif.

3. Une majoration de k

   Montrer que pour qu'un polygone k-progressif à *n* côtés existe, il faut nécessairement que k soit strictement inférieur à 2.

Indication : On rappelle que, pour tout réel $k \neq 1$, $1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1} = \frac{k^n - 1}{k - 1}$