OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

NANTES – SESSION 2009

SUJET DESTINÉ AUX CANDIDATS DES SÉRIES SCIENTIFIQUES (S-SVT et S-SI)

L'épreuve est d'une durée de 4 heures.

Les calculatrices, ainsi que tous les instruments de géométrie et les crayons de couleur sont autorisés.

Lors de l'examen des copies, toute ébauche de démarche sera valorisée, même s'il s'agit d'une démarche ne pouvant aboutir.

Exercice 1

Partie A : Questions préliminaires :

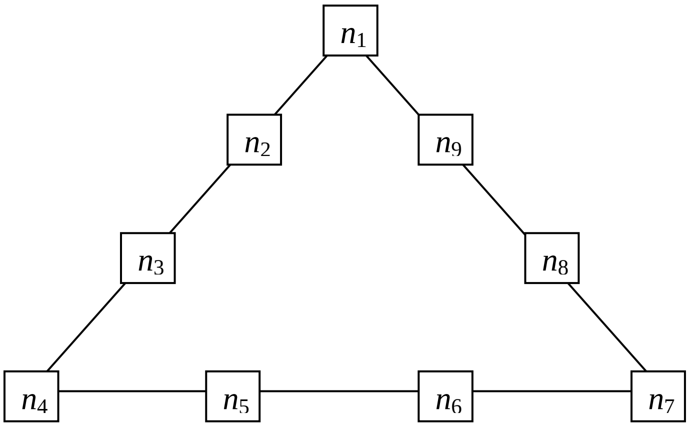
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1- Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?

2- Quelle est la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

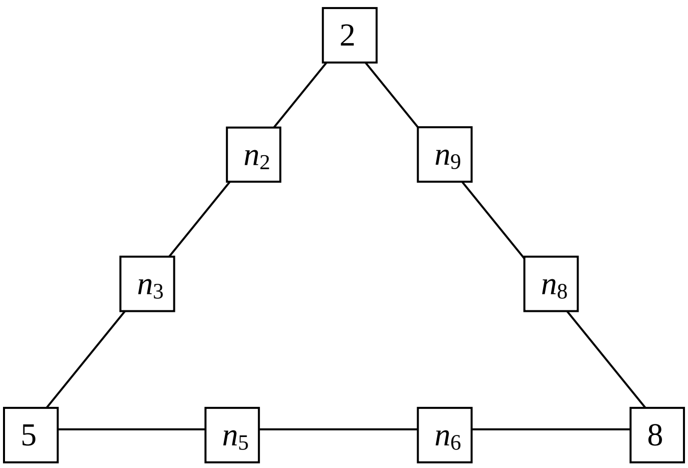


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \ = \ n_4 + n_5 + n_6 + n_7 \ = \ n_7 + n_8 + n_9 + n_1 \ = \ S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

1- Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



2- On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.

a. Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.

b. En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
c. Donner la liste des couples (S , T) ainsi envisageables.

3- Proposer un triangle 17-magique.

4- Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

5- **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
b. Proposer un triangle 19-magique.

6- Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.

7- Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.

<u>On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange</u> (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).

L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1- Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

On pourra noter c la longueur du côté du losange.

Les questions suivantes sont indépendantes.

2- Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du coté du losange.

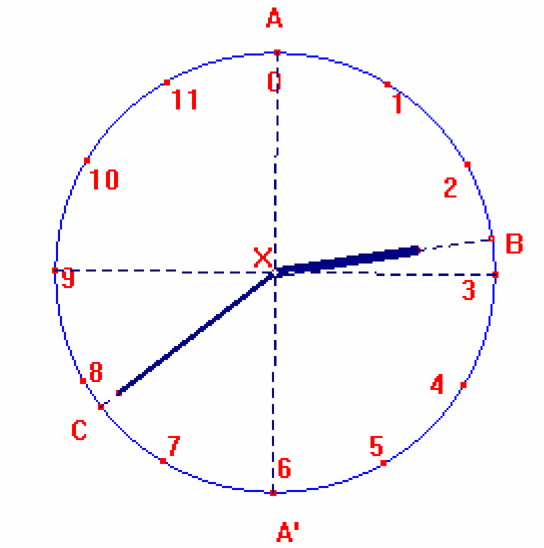
3- On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4- À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5- Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3

Sur l'horloge représentée par le cercle ci-contre, la petite aiguille indique les heures et la grande aiguille les minutes.
On supposera que les aiguilles se déplacent de façon continue et on limitera l'étude à un cycle de 12 h.
X est le centre du cercle, A est le point du cercle correspondant à 0h 0min 0s, A' est le point diamétralement opposé à A, B est le point mobile du cercle permettant de repérer le mouvement de la petite aiguille, C est le point mobile du cercle permettant de repérer le mouvement de la grande aiguille.



1- **a.** A 3h 30min, quelle est la mesure en degrés des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AXC}$?

   b. A 3h 35 min, quelle est la mesure en degrés des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AXC}$?

2- Entre 3h 0min et 4h 0min, à quelle(s) heure(s) la petite et la grande aiguille forment-elles, entre elles, un angle de 108° ?

3- A 0h 0min, l'aiguille des heures et celle des minutes sont superposées. Combien de fois ce phénomène se produira-t-il dans un cycle de 12h et à quelle(s) heure(s) ?

4- On ajoute l'aiguille des secondes. A 0h 0min 0s, les trois aiguilles sont superposées. Ce phénomène se produira-t-il une autre fois dans un cycle de 12h ?

5- Deux fourmis partent du point A en même temps. La première tourne sur le cercle délimitant le cadran de l'horloge, la seconde fait des allers-retours sur le diamètre [AA']. Sachant que leur vitesse est la même, peuvent-elles se rencontrer à nouveau au point A ?

Indication : En 1761, le mathématicien Johann Heinrich Lambert (Mulhouse 1728 – Berlin 1777) démontra l'irrationalité du nombre π…

Exercice 4

Alex veut construire un tétraèdre dont toutes les faces sont isométriques à un même triangle.

Il choisit pour un premier essai un triangle ABC de cotés 5 cm, 6 cm et 7 cm. Il construit un patron du tétraèdre. *(Figure 1)*

1- Montrer que le patron qu'il a construit est un triangle semblable au triangle ABC.

2- Il souhaite calculer le volume du tétraèdre qu'il a ainsi obtenu. Pour cela, il imagine un pavé droit AECFHDGB tel que les arêtes du tétraèdre ABCD sont des diagonales des faces de ce pavé. *(Figure 2)*
Dans ces conditions, le tétraèdre ABCD a-t-il toutes ses faces isométriques ?

3- Après des calculs savants, il arrive à trouver que le côté [AE] du pavé droit doit avoir pour longueur AE = $\sqrt{6}$

a. Calculer les valeurs des deux autres dimensions AF et AH du pavé droit.
b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Il choisit pour un second essai un triangle ABC de cotés 5 cm, 6 cm et 8 cm *(Figure 3).*

4- Est-il possible de former le tétraèdre ? (aucune justification n'est demandée)

5- Alex cherche une explication au problème rencontré. Il prend un triangle ABC quelconque dont les angles sont tels que $\widehat{A} \leqslant \widehat{B} \leqslant \widehat{C}$, et tente de construire un patron comme auparavant. En pliant ce patron autour de [AB], il remarque que l'angle $\widehat{CBD_3}$ varie pendant ce pliage entre $\widehat{B} + \widehat{A}$ et $\widehat{B} - \widehat{A}$.

a. Montrer que pour pouvoir former le tétraèdre, l'angle $\widehat{C}$ doit être compris entre ces deux valeurs.
b. En déduire qu'alors, tous les angles du triangle ABC doivent être aigus et expliquer la difficulté qu'a rencontrée Alex au second essai.

Figure 1

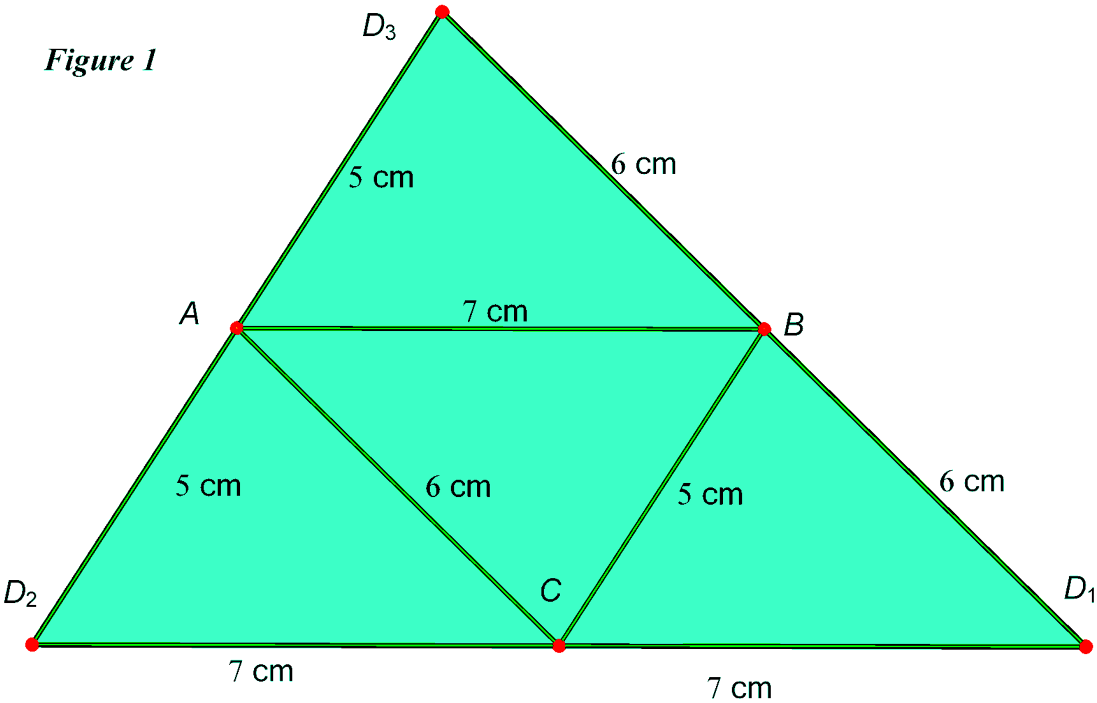


Figure 2

$AB = 7$ cm

$AC = 6$ cm

$BC = 5$ cm

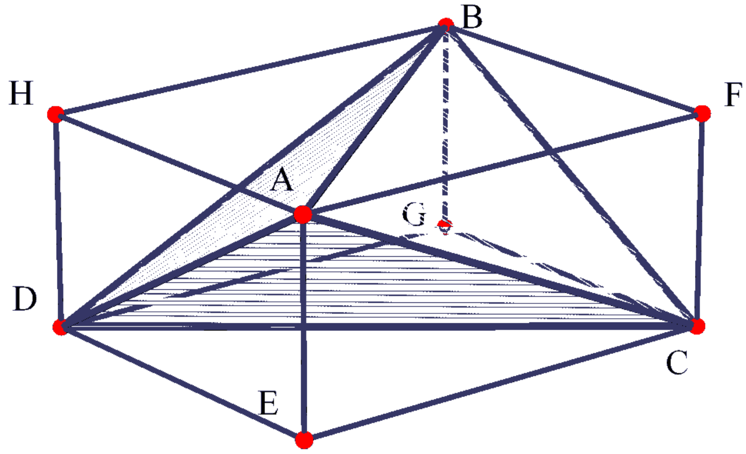


Figure 3