OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

ACADÉMIE DE NANTES

SESSION 2006

CLASSE DE PREMIERE : SERIES S ET SI

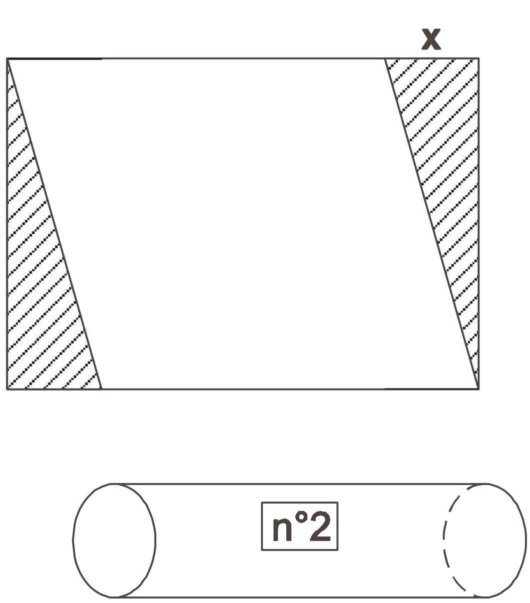
DURÉE : 4 heures

Le sujet comporte 4 pages
Les quatre exercices sont indépendants. Ils peuvent donc être traités dans l'ordre de votre choix.
Toute démarche clairement présentée, même non aboutie, sera prise en compte.
Les calculatrices sont autorisées.

Exercice 1 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 2 : le club de Maths

Le club de math du lycée se réunit.
Il y a Ludo, Claire, Marie, Jérôme et le prof Samuel.

Ludo lance le premier défi
« Est-il possible de construire un carré sachant que la différence entre la diagonale et le côté est 1 cm ? »

> *Question 1 : Jérôme prétend qu'il a trouvé tous les carrés satisfaisant à cette condition.*
> *Faire de même et le(s) construire à la règle et au compas en laissant apparents les traits de construction.*

Claire lance un deuxième défi
« J'aimerais bien savoir s'il est possible de trouver des programmes de calcul permettant à coup sûr d'obtenir des nombres entiers qui seraient les longueurs des côtés d'un triangle rectangle »

Ludo intervient : « En tout cas, moi je connais un tel triangle : celui qui a pour dimensions 3 ; 4 et 5 »
Claire répond « Oui, tu as raison, mais ça ne nous donne pas une méthode pour en obtenir d'autres ! »
Ludo : Mais si ! Il suffit de multiplier 3 ; 4 et 5 par un même nombre entier non nul et on obtiendra les longueurs d'un triangle rectangle »

> *Question 2 : Ludo a-t-il raison ?*

Samuel prend alors la parole : « J'ai lu autrefois un livre qui évoquait cette question, mais mes souvenirs ne sont pas sûrs. Il me semble qu'à partir de deux nombres entiers a et b, on pouvait construire 3 nombres qui convenaient.On qualifiait cela de « triangle rectangle en nombres ». Par exemple, je me souviens qu'avec 1 et 2 on pouvait trouver 3, 4 et 5, et qu'avec 2 et 3, on pouvait trouver 5, 12 et 13. Il faut sans doute travailler avec les carrés des nombres.

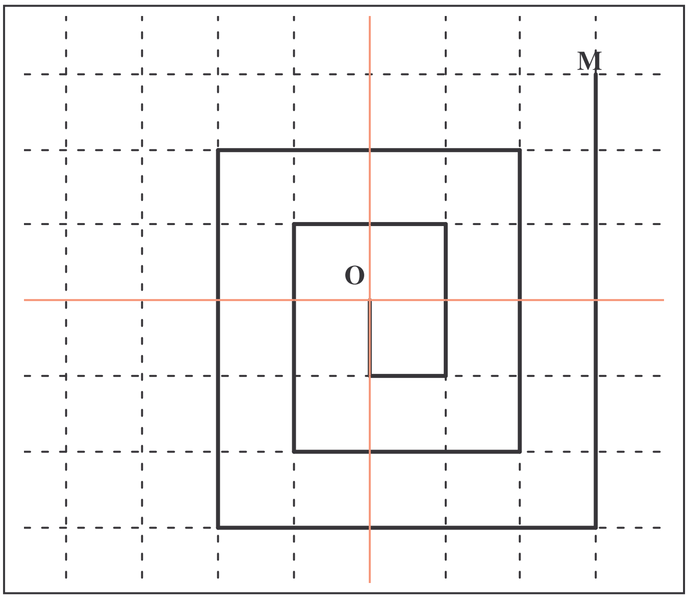
> *Question 3 : A partir de deux nombres entiers a et b, trouver la méthode de Samuel et démontrer algébriquement qu'elle permet de répondre au problème.*
> *Utiliser cette méthode pour trouver 2 autres triangles rectangles en nombres.*

Marie lance le troisième défi
«Peut-on trouver deux triangles rectangles dont les côtés sont des entiers et dont les aires sont égales ? »

> *Question 4 : Essayer de relever le défi de Marie*

Exercice 3 : la spirale

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l*(M) la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que OA=5.
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

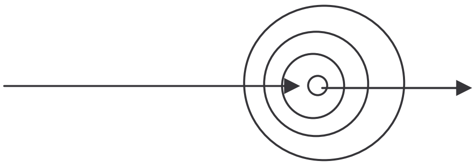
On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, 1+2+3+…+n = $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>Exercice 4</u> : le parc de loisirs

Les maires de deux communes appelées ***LA GRANGE*** et ***LA PLACE***, décident de consulter leurs concitoyens, afin de savoir s'ils sont satisfaits du projet de construction d'un parc de loisirs à proximité de leurs habitations.

Chaque ville est constituée de quatre quartiers selon un plan circulaire Centre-ville, $1^{\text{ère}}$ couronne, $2^{\text{ème}}$ couronne et $3^{\text{ème}}$ couronne comme le montre le dessin ci-dessous



Les maires fixent la règle suivante : pour que le parc s'implante, le taux de satisfaction de chaque quartier doit être au moins égal à 50 %. Au soir du scrutin, les premiers résultats tombent (seuls les résultats des quartiers $3^{\text{ème}}$ couronne ne sont pas encore connus). Ce tableau donne, dans chaque commune, quartier par quartier, le nombre de personnes qui se sont exprimées et celles qui se sont déclarées satisfaites.

	Commune de *LA GRANGE*		**Commune de *LA PLACE***	
	EXPRIMES	SATISFAITS	EXPRIMES	SATISFAITS
Centre ville	1500	1050	3000	2400
$1^{\text{ère}}$ couronne	2400	1728	1200	984
$2^{\text{ème}}$ couronne	1400	994	800	648
$3^{\text{ème}}$ couronne				

1. Les deux maires, réunis pour commenter ces résultats, calculent le taux de satisfaction dans leurs quartiers respectifs et disent alors : « A l'évidence, pour le moment, les plus satisfaits du projet sont les gens issus des $1^{\text{ères}}$ couronnes de nos villes »

Que pensez-vous de cette analyse ?

2. Les résultats des $3^{\text{èmes}}$ couronnes se font attendre. On sait néanmoins que :

• Dans la commune de *LA GRANGE*, 1500 personnes issus de la troisième couronne sont satisfaites.
• Dans la commune de *LA PLACE*, 1000 personnes issus de la troisième couronne se sont exprimées.
• Le nombre de personnes qui se sont exprimées et qui sont issues de la troisième couronne de la commune de LA GRANGE est quatre fois plus élevé que le nombre de personnes satisfaites issus de la troisième couronne de la commune de LA PLACE.

Dans quel intervalle le taux de satisfaction global (sur les deux communes) se situe-t-il ?

3. Le maire de la commune de *LA GRANGE* dit à son collègue : « Les premiers résultats sont encourageants pour l'implantation du parc. J'espère que le taux de satisfaction global (sur les deux communes) sera d'au moins 75 % ».

Le maire doit-il réellement espérer un tel taux de satisfaction global s'il souhaite que le parc s'implante? Commenter.