Étude d'un jeu

Énoncé

On lance trois dés bien équilibrés dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.
Alice et Bob calculent la somme des trois nombres obtenus.
Si la somme obtenue est égale à 9, Alice gagne.
Si la somme obtenue est égale à 10, Bob gagne.
Dans tous les autres cas, la partie est annulée.

Le but de l'exercice est de déterminer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner.

Étude expérimentale

1. Sur un tableur, réaliser une simulation de cette expérience aléatoire.

   Appeler l'examinateur pour valider cette simulation.

2. Sur un tableur, réaliser une simulation sur un échantillon de taille 1000 de cette expérience aléatoire et déterminer, pour cette simulation, les fréquences de réussite respectives d'Alice et de Bob.

   Appeler l'examinateur pour valider la feuille de calcul construite.

3. Est-il possible de conjecturer qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

   Appeler l'examinateur pour lui fournir cette réponse et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Étude mathématique

On souhaite maintenant calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.

4. Répondre aux deux questions suivantes (dans n'importe quel ordre) :
   - Calculer la probabilité de gagner d'Alice et de Bob.
   - Qui, d'Alice ou de Bob, a la plus grande probabilité de gagner ?

Production demandée

- Bilan de la simulation de la question 2 ;
- Réponse orale à la question 3 ;
- Réponses argumentées à la question 4.

Tangentes à deux courbes

Énoncé

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal du plan.

Soit a un nombre réel quelconque. On désigne respectivement par M et N les points de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'abscisse a et par (T_1) et (T_2) les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en M et N.

Les droites (T_1) et (T_2) coupent respectivement l'axe des abscisses en P et Q.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique (ou une calculatrice graphique) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites (T_1) et (T_2). Que peut-on remarquer pour les droites (T_1) et (T_2) ?

   Appeler le professeur pour lui montrer le graphique créé et lui indiquer la conjecture faite au sujet de (T_1) et de (T_2).

2. À l'aide du logiciel émettre une conjecture à propos de la longueur du segment $[PQ]$.

   Appeler le professeur pour lui présenter la conjecture et la démonstration envisagée.

3. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Production demandée

– Exposé oral de la méthode de construction de la figure adaptée à la situation ;
– Exposé oral des conjectures ;
– Exposé de la méthode choisie pour démontrer la dernière conjecture.

Suites associées

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{array}\right. \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \left\{\begin{array}{l} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{array}\right.$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = a_n + b_n \quad \text{et} \quad v_n = b_n - a_n.$$

   (a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

   (c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examinateur.

Appeler l'examinateur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4. (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).
   (b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
   (c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n).

Production demandée

– Construction de la feuille de calcul complète ;
– Formulation orale des conjectures ;
– Réponses argumentées à la question 4.

Marche aléatoire

Énoncé

Un pion est placé sur la case de départ :

				Départ				

Le lancer d'une pièce bien équilibrée détermine le déplacement du pion.

- PILE, le pion se déplace vers la droite
- FACE, le pion se déplace vers la gauche

Un trajet est une succession de 4 déplacements. On s'intéresse à l'événement A : « le pion est revenu à la case départ après 4 déplacements ».

À chaque lancer, on associe le réel $+1$ si le résultat est PILE et -1 si le résultat est FACE.

Étude expérimentale

1. Simuler à l'aide du tableur de 200 à 2000 trajets du pion et estimer la fréquence de l'événement A. Compléter le tableau suivant :

Nombre d'essais	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	2000
Fréquence de A										

Appeler l'examinateur pour vérifier le tableau obtenu.

Étude mathématique

2. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme des quatre réels.
   (a) En précisant la méthode choisie, calculer les valeurs possibles de X et le nombre de trajets possibles.

   Appeler l'examinateur pour contrôler la réponse et lui indiquer la démarche prévue à la question suivante

   (b) Calculer la probabilité de l'événement A à l'aide d'un schéma de Bernoulli et comparer avec l'estimation obtenue.

Production demandée

– Réaliser une simulation en utilisant les fonctions appropriées.
– Donner une réponse argumentée à la question 2.

Étude de flux de populations

Énoncé

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

– La population totale des trois zones ***reste constante.***
– Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone B et 1% de la population de la zone C.
– Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.
– Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.

On désigne par a_n, b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année $2008 + n$. On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n, b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

1. On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.
   (a) Représenter graphiquement, à l'aide du tableur, ou d'une calculatrice, les suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   (b) Conjecturer le sens de variation et la convergence des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

   Appeler l'examinateur pour vérification des résultats obtenus et des conjectures.

2. Pour chaque année $2008 + n$, soit d_n la différence de population entre les zones A et B. Conjecturer la nature de la suite (d_n).

   Appeler l'examinateur pour une vérification et lui indiquer les méthodes envisagées pour les démonstrations qui suivent.

3. On se propose de calculer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
   (a) Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
   (c) Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

Production demandée

– Une feuille de calcul donnant les valeurs de n et des termes des différentes suites.
– Un graphique représentant les suites (a_n), (b_n) et (c_n).
– Les réponses argumentées aux questions de la Partie 3.

Distance d'un point à une courbe

Énoncé

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B a pour coordonnées $(2; -1)$.

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit $\mathscr{C}$. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

Le but de l'exercice est de trouver la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure dynamique correspondant à cette situation.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   (a) M est un point quelconque de la courbe $\mathscr{C}$. Faire une conjecture sur la position du point M pour laquelle la distance BM semble minimale.
   On appelle ce point M_0.

   (b) Tracer la droite d perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0).
   Quelle semble être la position particulière de la droite d ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures émises
   et lui indiquer la ou les méthodes de contrôle prévues à la question (c).

   (c) Utiliser le logiciel pour contrôler les conjectures et, éventuellement, les rectifier.

2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les contrôles faits
   et lui proposer une méthode permettant à la fois de
   déterminer le point M_0 et la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

   (a) Déterminer, par le calcul, la position du point M_0.

   (b) Quelle est la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$?

3. Vérifier, par le calcul, la conjecture formulée au 1.(b).

Production demandée

- Obtention à l'écran de la figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La formulation des conjectures et leur contrôle.
- Les stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 2 et le résultat des calculs.
- La vérification demandée à la question 3.

Étude d'un lieu de points

Énoncé

On considère le carré direct ABCD du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. On appelle O le centre du carré. Un point M décrit le segment [DC]. La perpendiculaire à la droite (AM) passant par A coupe (BC) en N. On appelle I le milieu de [MN]. On se propose de déterminer le lieu des points I lorsque M décrit le segment [DC].

Étude expérimentale

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

> Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

2. Mettre en évidence avec le logiciel la nature du triangle AMN.
3. Faire afficher le lieu des points I lorsque M décrit le segment [DC].

> Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et pour lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Démonstrations

4. Démontrer que le triangle AMN est rectangle isocèle (on pourra utiliser une rotation de centre A).
5. En déduire la nature du triangle AIM ; établir que le point I est l'image de M par une similitude S de centre A dont on précisera l'angle et le rapport.
6. Déterminer $S(D)$ et $S(C)$ puis conclure sur le lieu de points cherché.

Production demandée

– Figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique
– Réponses argumentées pour les questions 5 et 6.

Recherche d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABB' tel que : $\left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Soit M un point variable de la droite (BB') et M' l'image de A dans la rotation de centre M et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On note I le milieu de $[BB']$ et J le milieu de $[MM']$.
On cherche à déteminer le lieu du point J lorsque M décrit la droite (BB').

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

   (b) Visualiser le lieu du point J quand M décrit la droite (BB').
   Quelle conjecture peut-on émettre ?

   (c) Que peut-on conjecturer à propos des triangles ABI et AMJ ?

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

2. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

   (a) Déterminer l'image du point M par la similitude S.

   Appeler l'examinateur pour faire le point et lui indiquer la méthode prévue pour la résolution de la question 2.(b).

   (b) En déduire le lieu du point J quand M décrit la droite (BB').

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure ;
– Formulation orale des conjectures sur le lieu du point J et sur les triangles ABI et AMJ ;
– Réponses argumentées aux questions 2.(a) et 2.(b).

Positions relatives dans une configuration

Énoncé

Dans le plan orienté, on définit le triangle OAB et on note M le milieu du segment $[AB]$. On construit les triangles AOD et OBC directs, rectangles et isocèles en O.

L'objet du problème est d'étudier les longueurs et les positions relatives des segments $[OM]$ et $[DC]$.

Étude expérimentale

1. Construire la figure décrite précédemment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Appeler l'examinateur pour valider la construction.

2. En modifiant le triangle OAB, émettre une conjecture concernant les longueurs OM et DC et une autre au sujet des positions relatives des droites (OM) et (DC).

Appeler l'examinateur pour valider les conjectures et exposer la démarche envisagée pour la preuve.

Démonstrations

3. Proposer une démonstration des conjectures faites.

Production demandée

– Construction de la figure ;
– Énoncé des deux conjectures ;
– Réponses argumentées à la question 3.

Courbes et équations

Énoncé

Soit m un réel. On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles dans l'intervalle $[-5, 5]$ de l'équation :

$$-x^2 + 2x - 1 + m\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad (E)$$

1. Dans cette question on pose $m = 2$.
   À l'aide d'un grapheur (logiciel ou calculatrice), donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'unique solution de (E).

   Appeler l'examinateur pour validation du résultat et de la méthode employée.

2. Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{e}^{x}$. À l'aide d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f et émettre une conjecture quant au nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans l'intervalle $[-5, 5]$, en fonction des valeurs de m.

   Appeler l'examinateur pour validation de la conjecture.

3. Démontrer que, pour tout m, l'équation (E) et l'équation $f(x) = m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle $[-5, 5]$.
4. Répondre au problème posé.

Production demandée

– Présentation de la méthode de résolution utilisée en 1. et graphique correspondant ;
– Représentation graphique et énoncé de la conjecture pour la question 2 ;
– Réponses argumentées aux questions 3 et 4.

Optimisation dans l'espace

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère les points $A(0,6,0)$, $B(0,0,8)$, $C(10,0,8)$. M est un point appartenant au segment $[OB]$. Le plan (Π) passant par M et orthogonal à la droite (OB) coupe la droite (AC) en P.

Partie expérimentale.

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.

Appeler l'examinateur pour la vérification de la construction.

2. On note respectivement N et Q les points d'intersection du plan (Π) avec les droites (OC) et (AB) et l'on admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle. En déplaçant le point M, émettre une conjecture quant à la position de ce point rendant maximale l'aire du rectangle.

Appeler l'examinateur pour valider la conjecture.

Partie démonstration.

On note $z = OM$.

3. Exprimer en fonction de z les longueurs MN et MQ.
4. Démontrer la conjecture émise en 2.

Production demandée

– La figure réalisée avec le logiciel ;
– Les démonstrations demandées dans les questions 3 et 4.

Comportement d'une suite récurrente

Énoncé

Soit u_1 un nombre réel fixé. On considère la suite récurrente u de premier terme u_1 et telle que pour tout entier naturel non nul n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + 1$.

1. En utilisant une calculatrice ou un tableur, calculer les premiers termes de cette suite et en réaliser une représentation graphique.
   Le choix du nombre de termes et de la valeur de u_1 est laissé au candidat, qui en testera plusieurs, dont $u_1 = -100$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs faits.

2. En fonction des différentes valeurs de u_1 :
   (a) émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite u ;
   (b) émettre une conjecture sur la limite de la suite u.

   Appeler l'examinateur pour valider les deux conjectures
   et indiquer la méthode prévue pour les démonstrations de la question (3).

3. Dans cette question on suppose que $u_1 = -100$.
   (a) Démontrer qu'à partir d'un certain rang n_0, à préciser, la suite u est décroissante.
   (b) Démontrer que la suite u est convergente et préciser sa limite.

Production demandée

– Écrans montrant les calculs ayant permis d'émettre les deux conjectures.
– Démarches et réponses argumentées pour la question 3.

Section plane d'un tétraèdre, optimisation d'une distance

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,,\ \vec{k}\,)$, on définit les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,\ 0,\ 1)$ et le point I milieu du segment $[AB]$.

Partie expérimentale

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, représenter le tétraèdre $OABC$ et le point I.
   (b) Pour un point M du segment $[AC]$, on définit le plan $\mathscr{P}$ passant par le point I et orthogonal à la doite (IM). Tracer la section du tétraèdre $OABC$ par le plan $\mathscr{P}$.
   (c) Le plan $\mathscr{P}$ coupe la droite (OB) en un point N. Construire le point N et tracer le segment $[MN]$.

Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite.

2. Étudier à l'aide du logiciel, les variations de la longueur MN et conjecturer la position du point M, sur le segment $[AC]$, telle que cette longueur soit minimale. Quelle est, d'après le logiciel, cette longueur minimale ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les observations faites et les résultats obtenus.

Démonstration

On définit le réel $t = \dfrac{AM}{AC}$ et on admet que les coordonnées des points M et N sont respectivement $M(1-t,0,t)$ et $N(0,t,0)$.

3. Calculer la longueur MN en fonction de t.

Appeler l'examinateur pour lui expliquer la méthode prévue pour déterminer le minimum de cette longueur.

4. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette longueur est minimale.
5. Donner la valeur minimale prise par la longueur MN.

Production demandée

– Réalisation d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ;
– Présentation orale, à partir de l'écran, des conjectures ;
– Solution argumentée de la question 4.

Cercles et similitudes

Énoncé

On considère un triangle équilatéral direct $O_1O_2O_3$, le milieu O du segment $[O_1O_2]$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre O_1 passant par O. On note A un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct du point O.
Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$, on note M_1 le point symétrique de M par rapport à O puis M' le point tel que le triangle MM_1M' soit équilatéral direct.

Étude expérimentale

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire le triangle $O_1O_2O_3$, placer le point O et tracer le cercle $\mathcal{C}$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.

2. Le point A étant construit sur le cercle $\mathcal{C}$, construire le point A' associé au point A par le procédé indiqué dans le préambule.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.

3. Placer un autre point, noté M, sur le cercle $\mathcal{C}$ et construire le point M' associé à ce point. Visualiser la courbe (ou lieu) que semble décrire le point M' lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ et émettre une conjecture à ce propos.

   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture.

4. Lorsque les points M et A sont distincts, les droites (AM) et $(A'M')$ se coupent en un point P. Placer le point P sur la figure. Émettre une conjecture concernant le lieu décrit par le point P lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Démonstrations

5. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre O par laquelle le point M du cercle $\mathcal{C}$ a pour image le point M'. Préciser l'angle et le rapport de cette similitude.
6. Déterminer le lieu du point M' lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$.
7. Préciser le lieu du point P lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

Production demandée

– Réalisation d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;
– Réponse argumentée pour les questions 5 et 6 ;
– Informations obtenues concernant le point P.

Suite définie par une moyenne arithmétique

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Partie expérimentale

1. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).
2. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait : $u_n = f(n)$.

> Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et proposer une méthode pour la préciser.

3. Mettre en place la stratégie validée par l'examinateur et déterminer précisément la fonction f.

> Appeler l'examinateur, lui indiquer la fonction f trouvée et lui proposer une méthode pour résoudre la question 4.

Démonstrations

4. (a) Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction validée par l'examinateur.

   (b) En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

Production demandée

– Des explications orales et à l'écran pour les questions 1 à 3 ;
– Les réponses argumentées à la question 4.

Points équidistants d'une droite et d'un point

Énoncé

On considère dans le plan $(\mathscr{P})$ une droite D et un point F non situé sur cette droite. Il s'agit de déterminer l'ensemble G, lieu géométrique des points du plan équidistants de D et de F.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la droite D et le point F. Construire également un point H sur la droite D et la droite T perpendiculaire à D en H.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la figure
   et exposer la démarche envisagée pour la suite de la construction.

2. Construire un point M de T équidistant de F et de H.
   Construire le lieu géométrique du point M lorsque le point H décrit la droite D.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de G ?

   Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure et lui indiquer votre conjecture.

3. On considère un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que D est la droite $(O; \overrightarrow{i})$ et le point F est sur la droite $\left(O; \overrightarrow{j}\right)$.
   Pour un point $M\,(x, y)$ quelconque du plan, on considère le point H, projeté orthogonal de M sur la droite D.
   (a) Calculer MF^2 et MH^2 en fonction de x et y et en déduire une condition liant x et y pour que le point M soit équidistant de F et de D.
   (b) Donner alors une équation de G et conclure.

Production demandée

– Réaliser une figure adaptée à la situation ;
– Expressions de MF^2 et MH^2 ;
– Réponses argumentées pour la question 3b.

Tétraèdre trirectangle

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on construit le tétraèdre $OABC$ avec : $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,2)$.
Ce tétraèdre est dit « trirectangle » car trois de ses faces sont des triangles rectangles.
Pour tout point M du segment $[AB]$, on construit le projeté orthogonal H du point O sur la droite (MC).

1. Proposer, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une figure traduisant la situation et construire le lieu des points H lorsque le point M décrit le segment $[AB]$.
   Quel semble être le lieu du point H ?

   Appeler l'examinateur pour vérifier le tracé du lieu et la conjecture.

2. Conjecturer les positions du point M sur le segment $[AB]$ pour lesquelles la longueur CH semble maximale, minimale.

   Appeler l'examinateur pour vérifier ces conjectures.

3. On se propose de démontrer les conjectures émises.
   (a) Démontrer la double égalité : $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO}^2$.

   Appeler l'examinateur pour lui indiquer les stratégies retenues pour répondre aux questions (b) et (c) suivantes.

   (b) Valider ou invalider alors les conjectures faites à la question 2. Calculer les extremums de CH.
   (c) Le lieu de H est-il un arc de cercle ?

Production demandée

– Expression des conjectures des questions 1 et 2.
– Réponses argumentées à la question 3.

Restes modulo p

Énoncé

Le but de cet exercice est d'étudier les restes modulo p (p entier strictement supérieur à 1) des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $u_n = an + b$, a et b étant deux entiers naturels donnés.

1. Construire une feuille de calcul donnant les restes modulo 20 des 20 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 12n + 5$.

   Appeler l'examinateur

2. Adapter la feuille de calcul de façon à obtenir les restes modulo p des 20 premiers termes de la suite définie par $u_n = an + b, n \in N$, de telle manière qu'on puisse modifier les valeurs de a, b et p. Notez sur votre feuille les restes obtenus dans les cas particuliers suivants :
   (a) $p = 20$ et $u_n = 5n - 3$;
   (b) $p = 7$ et $u_n = 5n - 3$.

   Quelle conjecture peut-on formuler quant aux suites formées par ces restes euclidiens ?

   Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture émise

3. Démonstration de la conjecture :
   (a) Montrer que, parmi les nombres $u_0, u_1, \ldots, u_p$, il existe deux nombres ayant le même reste dans la division euclidienne par p, pour p entier naturel non nul.
   (b) Soient n_0 et $n_0 + T$ les rangs de ces deux nombres ($T \neq 0$).
   Montrer que aT est un multiple de p.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel k, u_{T+k} et u_k ont le même reste dans la division euclidienne par p.
   (d) Démontrer alors la conjecture.

Production demandée

– Feuille de calcul correspondant aux diverses suites.
– Les démonstrations de la question 3.

Suite aléatoire

Énoncé

On considère une suite (S_n) définie par le lancer d'une pièce équilibrée de la façon suivante :

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_{n+1} = S_n + 1 & \text{si on obtient PILE} \\ S_{n+1} = S_n - 1 & \text{si on obtient FACE} \end{cases}.$$

On note A_n l'événement « obtenir $S_n = 0$ ».

On s'intéresse à la probabilité de réaliser l'événement A_n pour un entier n non nul donné.

Étude expérimentale

1. En utilisant un tableur, effectuer une simulation donnant les 11 premiers termes de 1 000 suites définies de la même façon que (S_n).

   Existe-t-il des valeurs de n pour lesquelles l'événement A_n est impossible ? Justifier votre réponse.

   Appeler l'examinateur pour présenter votre simulation et votre justification.

2. (a) Donner les fréquences d'apparition de l'événement A_n pour n variant de 1 à 10.

   (b) Faire d'autres simulations de même taille pour compléter le tableau suivant :

Fréquences d'apparition de A_n										
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Simulation n° 1										
Simulation n° 2										
Simulation n° 3										
Simulation n° 4										
Simulation n° 5										

   Appeler l'examinateur pour une vérification.

Étude mathématique

3. Déterminer les probabilités de réaliser les événements A_2, A_4 et A_6.

   Appeler l'examinateur pour une vérification.

4. Donner une expression de $p(A_n)$ en fonction de la parité de n.

Production demandée

- Présentation orale des premiers termes des suites puis du tableau des fréquences des 5 simulations ;
- Calcul de $p(A_2)$, de $p(A_4)$ et de $p(A_6)$;
- Justification de la méthode de calcul de $p(A_n)$.

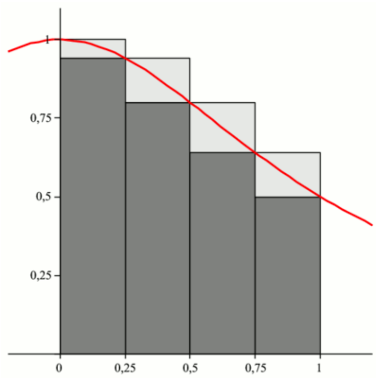
Calcul approché d'une intégrale

Énoncé

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x$, où la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.

Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des « rectangles » et de partager l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.



1. Dans cette question on donne à n la valeur 4. Quel encadrement de l'intégrale I le dessin ci-contre suggère-t-il ? Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

   Faire calculer cet encadrement par la calculatrice ou le tableur.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de l'encadrement trouvé.

2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.

   (a) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir l'encadrement de I et son amplitude dans le cas où $n = 10$ puis où $n = 20$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de l'automatisation effectuée.

   (b) Conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.

   Appeler l'examinateur pour lui indiquer la conjecture émise
   et lui indiquer les méthodes envisagées pour la question suivante.

3. Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en 2.(b), l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure ou égale à 10^{-2}.

Production demandée

– Encadrements de I obtenus sur calculatrice ou tableur pour les valeurs de n demandées.
– Stratégie de démonstration du résultat conjecturé à la question 2.(b).

Étude de deux lieux géométriques

Énoncé

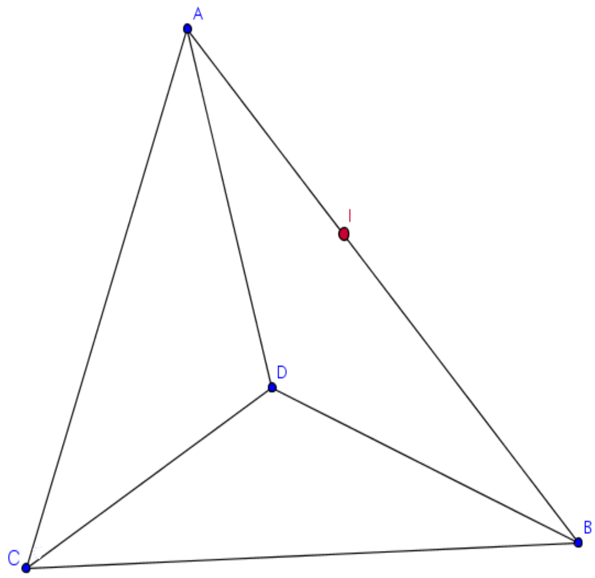
On considère un tétraèdre $ABCD$ et un point I quelconque du segment $[AB]$.

Le plan parallèle au plan (BCD) passant par I coupe la droite (AC) en J et la droite (AD) en K.

On désigne par L l'isobarycentre des trois points I, J et K.

On considère le point H projeté orthogonal du point C sur la droite (BL).

Le but de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique du point L ainsi que celui du point H, lorsque le point I décrit le segment $[AB]$.



Expérimentation

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure géométrique correspondant à cette situation.
2. Visualiser quelques positions du point L pour des positions différentes du point I sur le segment$[AB]$.
   On aura intérêt à utiliser le mode « trace » si cette fonction est disponible dans le logiciel utilisé.
   Quel semble être le lieu géométrique du point L ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.

3. Visualiser quelques positions du point H pour des positions différentes du point I sur le segment$[AB]$. Quel semble être le lieu géométrique du point H ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.

Démonstrations

4. Démontrer une des deux conjectures émises.

Production demandée

- Obtention à l'écran de la figure demandée dans les questions 2 et 3.
- Une des stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 4.

Étude du reste d'une division euclidienne

Énoncé

Pour tout entier naturel non nul n on considère les deux nombres entiers $N = 3n^2 - n + 1$ et $D = 2n - 1$.

Le but de l'exercice consiste à déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division enclidienne de N par D.

Expérimentation

1. Déterminer, à l'aide d'un logiciel, les valeurs du reste de la division euclidienne de N par D, pour toutes les valeurs de n comprises entre 1 et 50.
2. Représenter graphiquement ce reste en fonction de n.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la représentation obtenue.

3. Conjecturer, suivant les valeurs de n, l'expression du reste de la division enclidienne de N par D.

Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture trouvée.

Justifications

4. La conjecture formulée est-elle vraie ? Justifier.

Production demandée

- Obtention à l'écran de la représentation demandée dans la question 2. de la partie I.
- La conjecture faite dans la question 3. de la partie I.
- La stratégie prévue pour valider ou invalider la conjecture faite.

Étude de lieux géométriques

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$. À tout point M du segment $[AB]$, on associe les points P et Q, projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OA) et (OB), et les points R et S, sommets du carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ tels que $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. On note aussi I le milieu du segment $[PQ]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[AB]$.

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

   (b) Visualiser les lieux des points R et S quand M décrit le segment $[AB]$, puis émettre une conjecture sur la nature de ces lieux.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la conjecture.

   (c) Déterminer de manière expérimentale une équation du lieu du point S.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la réponse et expliquer les manipulations effectuées.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier ces conjectures en se plaçant dans le plan complexe. On appelle x l'abscisse du point M, avec $x \in [0\,;\,1]$.

   (a) Montrer que l'affixe de M est : $x+\mathrm{i}(1-x)$.

   (b) Déterminer l'affixe de R ou celle de S. Justifier l'une des conjectures émises à la question 1.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure ;
– Démarches et réponses argumentées pour les questions 2.(a) et 2.(b).

Triangle inscrit dans une courbe donnée

Énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle $\mathscr{E}$ la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

On désigne par a, b, c trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B, C les points de $\mathscr{E}$ d'abscisses respectives a, b, c.
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
On appelle $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC, son centre est le point E.
Le point D est le symétrique du point H par rapport à O.

Le but de l'exercice est d'observer la position de certains points de la figure et d'étudier celle du point H.

1. (a) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

   Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure construite.

   (b) Faire varier a, b, c et émettre une ou deux conjectures concernant :
   – la position du point H ;
   – la position du point D.

   Appeler l'examinateur pour vérifier les conjectures.

   (c) À l'aide de manipulations appropriées, émettre une conjecture sur les ordonnées des points D et H en fonction de a, b, c, puis sur l'abscisse de H.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la conjecture.

2. Démontrer la conjecture émise sur les coordonnées du point H.
3. Proposer une démarche permettant de démontrer la (ou les) conjecture(s) faite(s) pour le point D (on ne demande pas les calculs mais uniquement le plan proposé).

Production demandée

– Figure réalisée avec le logiciel de géométrie.
– Démarches et réponses argumentées pour les questions 2. et 3.

Solutions d'une relation de congruence

Énoncé

Le but du problème est de déterminer tous les entiers naturels n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$: « $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$ ».

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice déterminer tous les entiers naturels n inférieurs ou égaux à $121 = 11^2$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

   Appeler l'examinateur, lui donner le résultat trouvé et expliquer la méthode utilisée.

2. On se propose, dans cette partie 2., de démontrer que tout entier naturel n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à 121.
   (a) Pour tout n entier naturel, calculer $a = n^2 + 11 - (n + 11)(n - 11)$.

   Appeler l'examinateur, lui donner la valeur trouvée pour a
   et lui indiquer la méthode prévue pour résoudre la question 2.(b)

   (b) Démontrer que tout n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à 121.
3. Conclure en donnant l'ensemble des entiers naturels vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

Production demandée

– Explications orales pour les questions 1. et 2.(a) et 3. ;
– Réponse argumentée à la question 2.(b).
