TD 4 - Algèbre linéaire : rang d'un système de vecteurs

On considère m vecteurs de $\mathbb{R}^n$, v_1, v_2, …, v_m.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^4$: $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $v_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Le sous-espace vectoriel engendré par ces cinq vecteurs est de dimension 3 et une base de ce sous-espace vectoriel est $(v_1,\, v_2,\, v_3 - 2v_1)$.

Travail demandé :
Écrire un programme Scilab permettant de déterminer la dimension du sous-espace $vect\,(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_m)$ et d'en extraire une base.

1. Former la matrice A de dimensions $n \times m$ telle que : $A = [v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_m]$.
2. Appliquer la méthode du pivot de Gauss à la matrice A^T.
   Il faut tenir compte du fait que certains pivots peuvent être nuls.
3. Afficher le rang et une matrice dont les colonnes forment les vecteurs d'une base de $vect\,(v_1,\, v_2,\, \ldots,\, v_m)$ dans $\mathbb{R}^n$.
4. Tester le programme, en vérifiant en particulier qu'il fonctionne pour $n < m$ et $m > n$.

Script Scilab

```
// rang d'un système de vecteurs
// et extraction d'une base
// ----------------------------------------
P=[1,2,3,4;2,4,6,8;3,6,9,12];
M=evstr(x_matrix('entrer une matrice ',P));
// ----------------------------------------
A=M';// on transpose la matrice M
[n,m]=size(A);
r=0;
k=1;
// ----------------------------------------
a=min([n,m]);
for i=1:m
    [pivot_k, numlgn]=max(abs(A(k:n,k)));
    // si pivot_k nul, on place le vecteur k
    // en dernière colonne de la matrice A
    if pivot_k<1D-8 then
        C=[];
        C=A(:,k);
        B=[A(:,1:k-1),A(:,k+1:m),C];
        A=B;
    // sinon on applique la méthode du pivot
    else if k<n+1 then
    numlgnpivot=numlgn+k-1;
    L=[];
    L=A(numlgnpivot,:);
    A(numlgnpivot,:)=A(k,:);
    A(k,:)=L;
    for i=k+1:n
        alpha_k=A(i,k)/A(k,k);
        A(i,k:m)=A(i,k:m)-alpha_k.*A(k,k:m);
    end
    k=k+1;// indice de la colonne traitée
    r=r+1;// nombre de vecteurs libres
    end
end
end
// -------------------------------------
disp('rang :');
disp(r);
// V est une matrice de r vecteurs lignes
V=A(1:r,:);
// -------------------------------------
disp('base :');
disp(V');
```