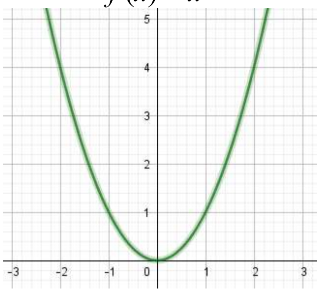
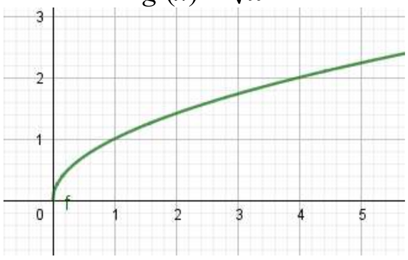
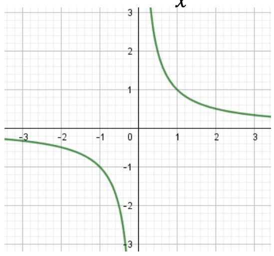
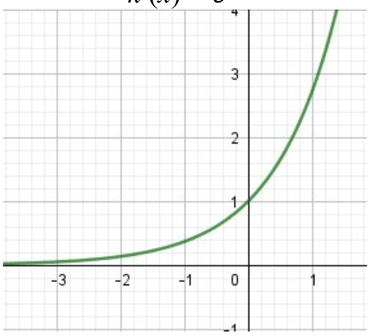
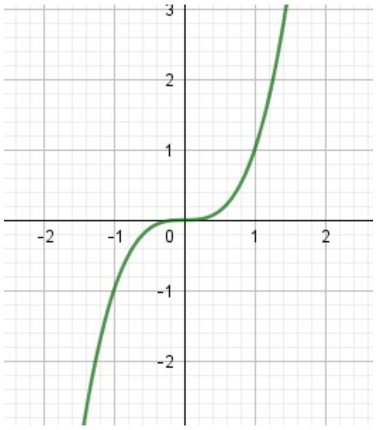
TP : Découverte de la convexité

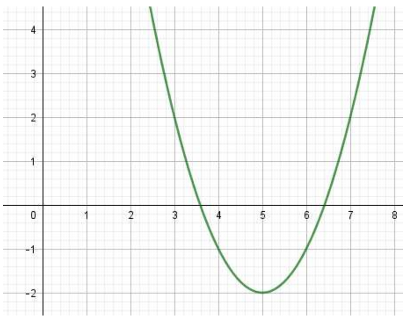
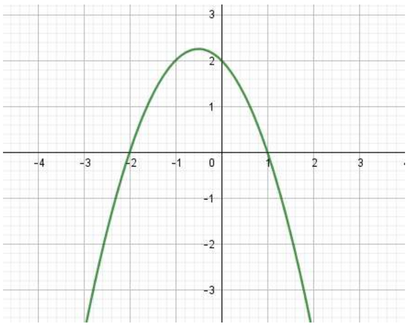
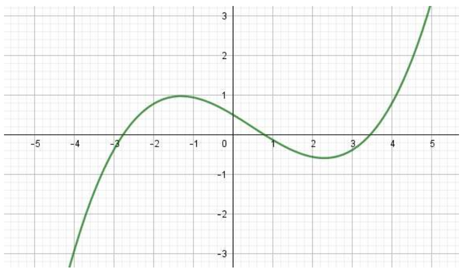
I – Vocabulaire

Observer les 5 graphiques ci-dessous :

<table>
<tr>
<td>$f(x) = x^2$

On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}$</td>
<td>$g(x) = \sqrt{x}$

On dit que g est concave sur $[0\,;+\infty[$</td>
<td>$h(x) = \frac{1}{x}$

h est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$</td>
</tr>
<tr>
<td>$k(x) = e^x$

k est convexe sur $\mathbb{R}$</td>
<td colspan="2">$l(x) = x^3$

l est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.
Le point de coordonnées $(0\,;0)$ est appelé point d'inflexion à la courbe</td>
</tr>
</table>

<u>A faire vous-même 1</u>

Pour les 3 courbes suivantes, dire si elles sont convexes ou concaves et préciser sur quels intervalles.
Possèdent-elles des points d'inflexion ? Lesquels ?

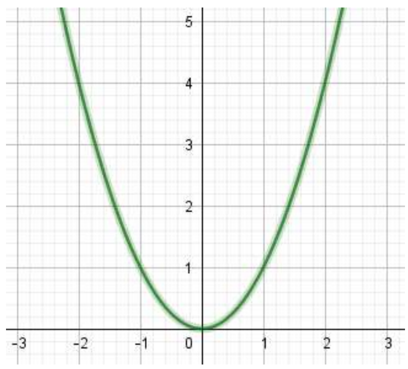
$f(x) = x^2 - 10x + 23$	$g(x) = -x^2 - x - 1$	$h(x) = \frac{x^3}{15} - 0{,}1x^2 - 0{,}6x + 0{,}5$
		

II - Vitesse de croissance

A faire vous-même 2

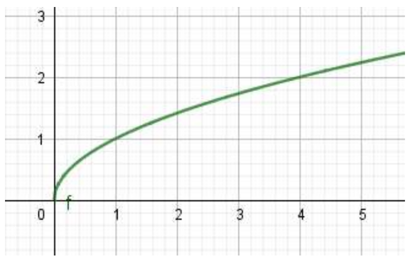
Reprenons plus en détail la fonction carrée et la fonction racine carrée.
Pour chacune d'entre elle, compléter les tableaux ci-dessous qui mettront en évidence les écarts entre les images de deux nombres x espacés de 1 unité ($f(1)-f(0)$; $f(2)-f(1)$ etc……..)
Compléter alors les phrases inscrites sous les courbes.

x	$f(x)=x^2$	*Ecart entre deux images successives*
0	0	///
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Pour une fonction convexe,
les images croissent de plus en plus_____________ .

x	$g(x)=\sqrt{x}$	*Ecart entre deux images successives*
0	0	///
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Pour une fonction concave,
les images croissent de ________ en _________ vite.

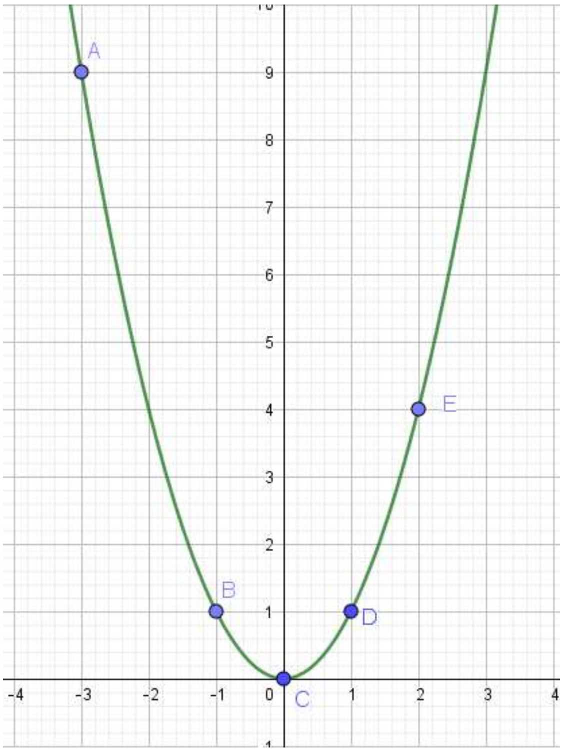
III - Lien entre convexité et dérivation

Toujours pour la fonction carrée $f(x)=x^2$ et la fonction racine carrée $g(x)=\sqrt{x}$, nous allons maintenant observer les nombres dérivés de ces fonctions en différents points.

A faire vous-même 3
Compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	0	1	2
$f'(x)$					

Sur le graphique ci-dessous, tracer alors les 5 tangentes aux points d'abscisses -3 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 :



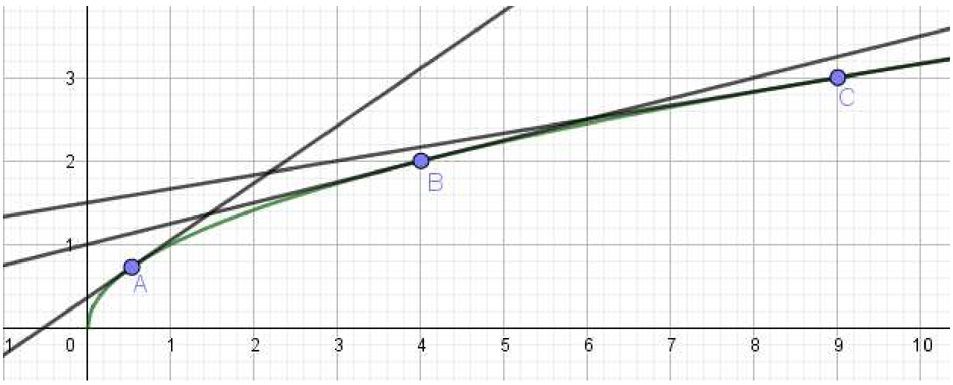
Rappel : la tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse *-3* a pour coefficient directeur (ou pente) *f* '(-3)

A faire vous-même 4

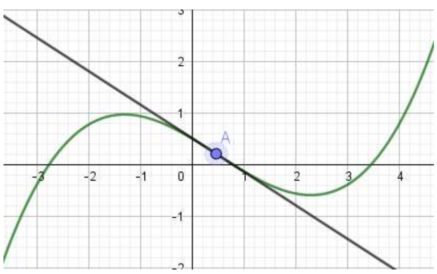
Compléter le tableau suivant :

x	0,5	2	4	7	9
$g'(x)$					

Voici la représentation graphique de *g* et de ses tangentes aux points d'abscisses 0,5 ; 4 et 9 :



Conclusion :
Si une fonction est convexe (cas de *f*), alors les pentes de ses tangentes __________________.
Si une fonction est concave (cas de *g*), alors les pentes de ses tangentes___________________.
Si une fonction possède un point d'inflexion, alors la tangente en ce point traverse la courbe en ce point :



Pour visualiser cette conclusion, flasher le code ci-contre :

https://youtu.be/6SMG4o2EoGY

Théorème 1 :
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

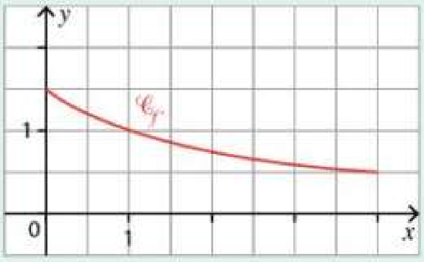
- f convexe sur I équivaut à f' croissante sur I
- f concave sur I équivaut à f' décroissante sur I
- la courbe représentative de f possède un point d'inflexion au point d'abscisse a équivaut à f' change de variation en a

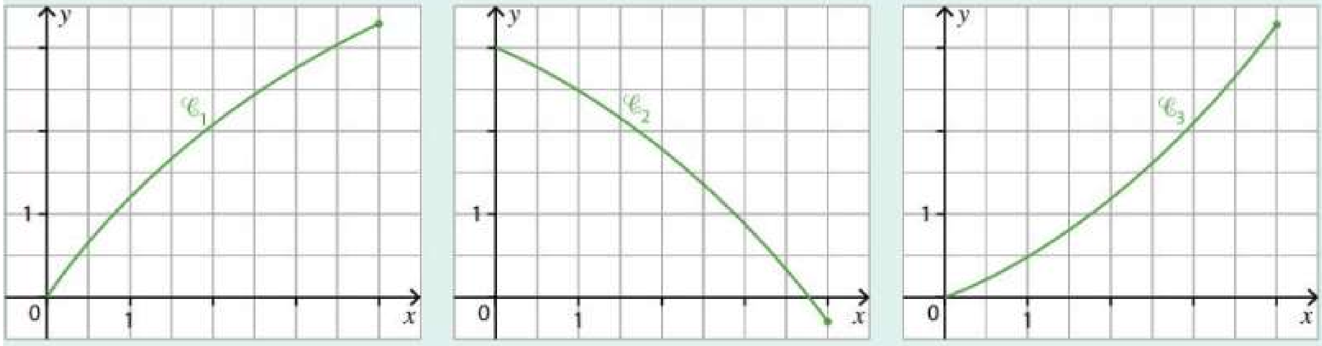
<u>A faire vous-même 5</u>

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[0\,;4]$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de sa fonction dérivée f', représentée ci-contre.

- $\mathscr{C}_f$ est l'une des trois courbes ci-dessous.

Préciser laquelle en justifiant clairement la réponse.





Nous venons donc de voir que pour étudier la convexité d'une fonction f, il fallait étudier les variations de la fonction f'. Or nous savons que pour étudier les variations d'une fonction, il faut étudier le signe de sa fonction dérivée (cours de 1ière). Il s'agit donc ici de déterminer **la fonction dérivée de la fonction f', notée f'' et appelée dérivée seconde de la fonction f**, et d'en déterminer son signe.

Théorème 2 :
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f convexe sur I équivaut à f'' positive sur I
- f concave sur I équivaut à f'' négative sur I
- la courbe représentative de f possède un point d'inflexion au point d'abscisse a équivaut à f'' s'annule et change de signe en a

Remarque :
Si f est convexe sur I, alors sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes et en-dessous de ses sécantes sur I.
Si f est concave sur I, alors sa courbe représentative est en-dessous de ses tangentes et au-dessus de ses sécantes sur I.

Exemple et point méthode :

Etudier la convexité de la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.

Nous commençons par dériver f puis f' :

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 3$

$f''(x) = 6x - 12$

f'' s'annule pour $x = 2$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de f''		$-$	0	$+$	
Variations de f'		↘		↗	
Convexité de f		*f est concave*	-9	*f est convexe*	

Conclusion : f est concave sur $]-\infty\,;2]$

f est convexe sur $[2\,;+\infty[$

La courbe représentative de f possède un point d'inflexion de coordonnées $(2\,;-9)$.

A faire vous-même 6

Etudier la convexité de la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = (x-2)e^{-2x}$.