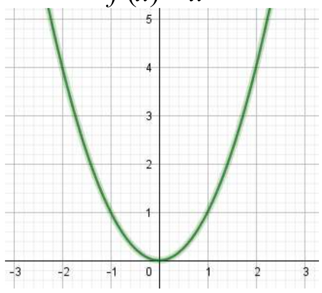
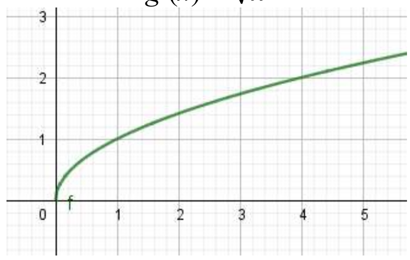
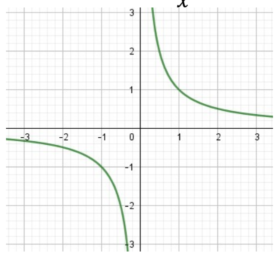
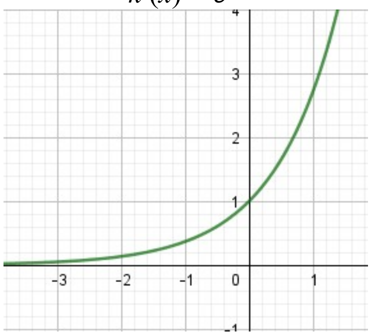
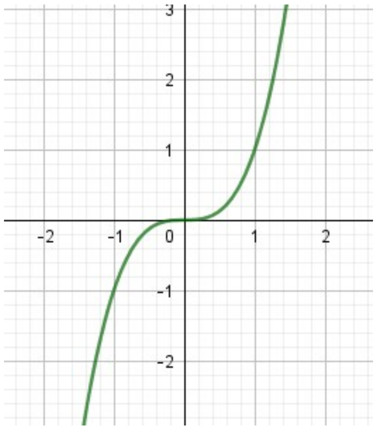
TP : Découverte de la convexité

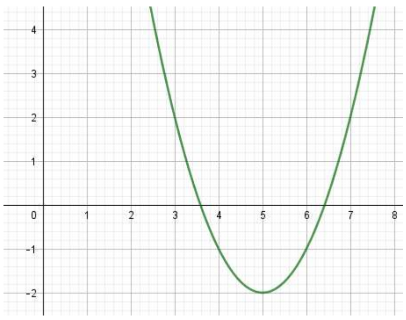
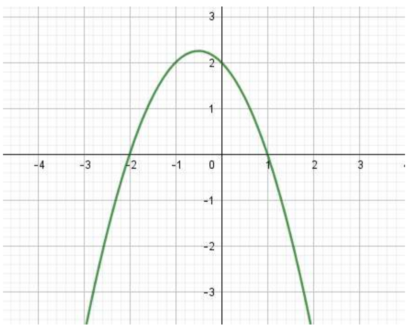
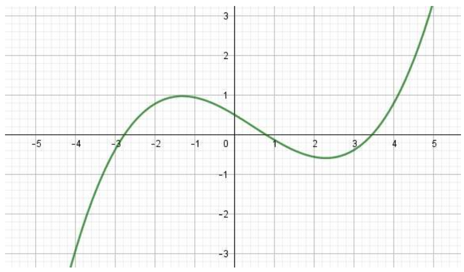
I – Vocabulaire

Observer les 5 graphiques ci-dessous :

$f(x) = x^2$  On dit que f est **convexe** sur $\mathbb{R}$	$g(x) = \sqrt{x}$  On dit que g est **concave** sur $[0\,;+\infty[$	$h(x) = \frac{1}{x}$  h est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$
$k(x) = e^x$  k est convexe sur $\mathbb{R}$	$l(x) = x^3$ 	l est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$. Le point de coordonnées $(0\,;0)$ est appelé **point d'inflexion** à la courbe

<u>A faire vous-même 1</u>

Pour les 3 courbes suivantes, dire si elles sont convexes ou concaves et préciser sur quels intervalles.
Possèdent-elles des points d'inflexion ? Lesquels ?

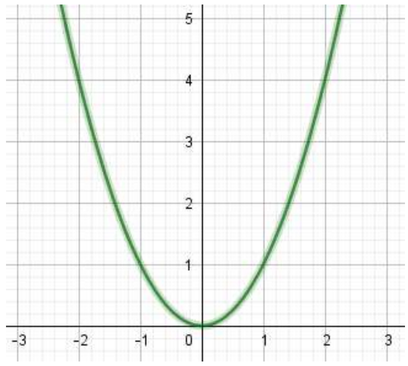
$f(x) = x^2 - 10x + 23$	$g(x) = -x^2 - x - 1$	$h(x) = \frac{x^3}{15} - 0{,}1x^2 - 0{,}6x + 0{,}5$
		

II – Vitesse de croissance

A faire vous-même 2

Reprenons plus en détail la fonction carrée et la fonction racine carrée.
Pour chacune d’entre elle, compléter les tableaux ci-dessous qui mettront en évidence les écarts entre les images de deux nombres x espacés de 1 unité ($f(1)-f(0)$; $f(2)-f(1)$ etc……..).
Compléter alors les phrases inscrites sous les courbes.

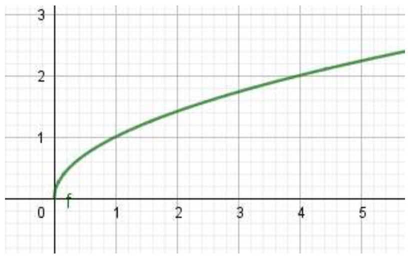
x	$f(x)=x^2$	*Ecart entre deux images successives*
0	0	//
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Pour une fonction convexe,
les images croissent de plus en plus_____________ .

(Pour le tableau ci-dessous, donner des valeurs approchées au besoin)

x	$g(x)=\sqrt{x}$	*Ecart entre deux images successives*
0	0	//
1	1	1
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Pour une fonction concave,
les images croissent de ________ en ________ vite.

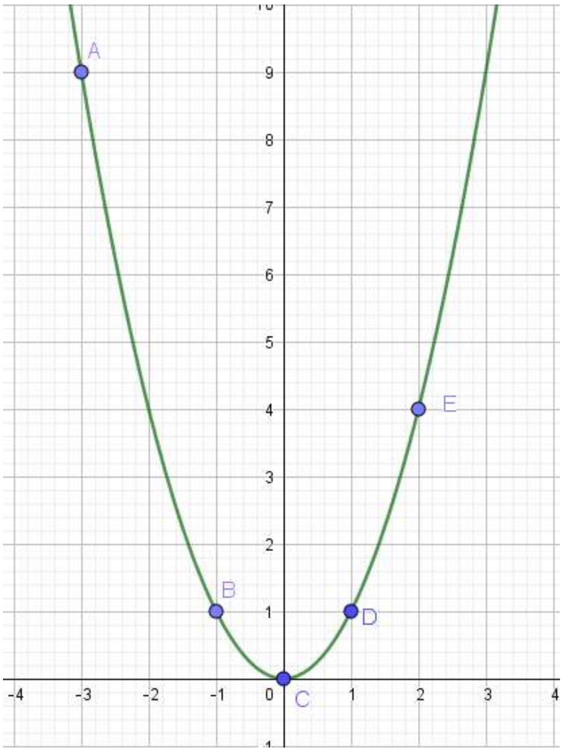
III – Lien entre convexité et dérivation

Toujours pour la fonction carrée $f(x)=x^2$ et la fonction racine carrée $g(x)=\sqrt{x}$, nous allons maintenant observer les nombres dérivés de ces fonctions en différents points.

A faire vous-même 3
Compléter le tableau suivant :

x	-3	-1	0	1	2
$f'(x)=2x$					

Sur le graphique ci-dessous, tracer alors les 5 tangentes aux points d'abscisses -3 ; -1 ; 0 ; 1 et 2 :



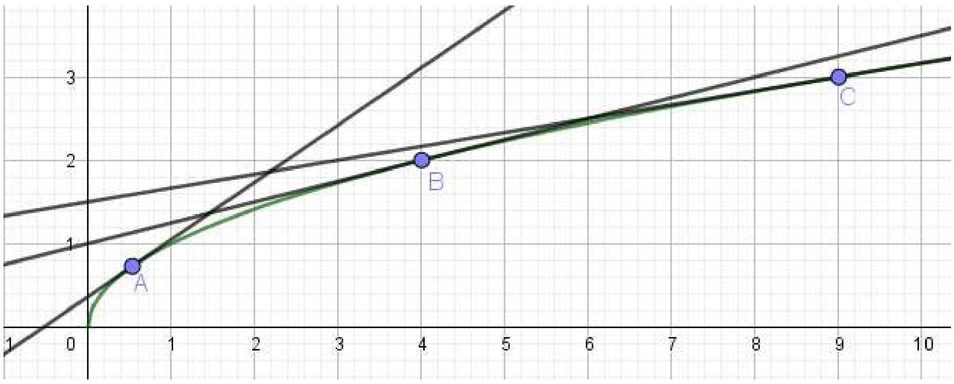
Rappel : la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -3 a pour coefficient directeur (ou pente) $f'(-3)$

A faire vous-même 4

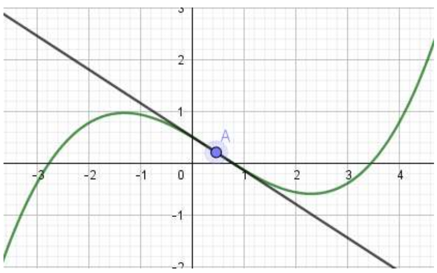
Compléter le tableau suivant :

x	0,5	2	4	7	9
$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$					

Voici la représentation graphique de g et de ses tangentes aux points d'abscisses 0,5 ; 4 et 9 :



Conclusion :
Si une fonction est convexe (cas de f), alors les pentes de ses tangentes ___________________.
Si une fonction est concave (cas de g), alors les pentes de ses tangentes___________________.
Si une fonction possède un point d'inflexion, alors la tangente en ce point traverse la courbe en ce point :



Pour visualiser cette conclusion, flasher le code ci-contre :

https://youtu.be/6SMG4o2EoGY

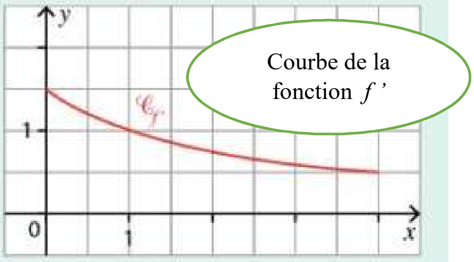
Théorème 1 :
Soit *f* une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

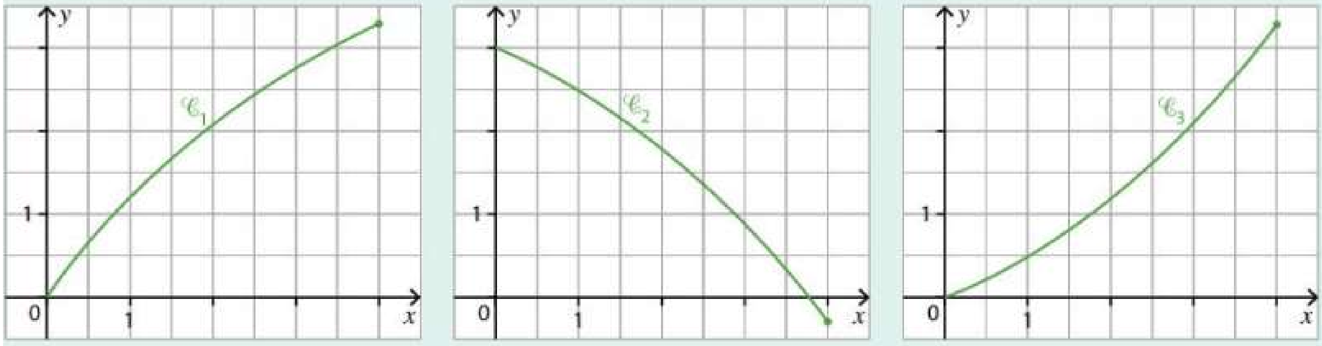
- *f* convexe sur I équivaut à *f* ’ croissante sur I
- *f* concave sur I équivaut à *f* ’ décroissante sur I
- la courbe représentative de *f* possède un point d’inflexion au point d’abscisse *a* équivaut à *f* ’ change de variation en *a*

A faire vous-même 5

Soit *f* une fonction définie et dérivable sur [0 ; 4].
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathscr{C}_{f'}$ la courbe représentative de sa fonction dérivée *f*′, représentée ci-contre.

• $\mathscr{C}_f$ est l’une des trois courbes ci-dessous.
Préciser laquelle en justifiant clairement la réponse.





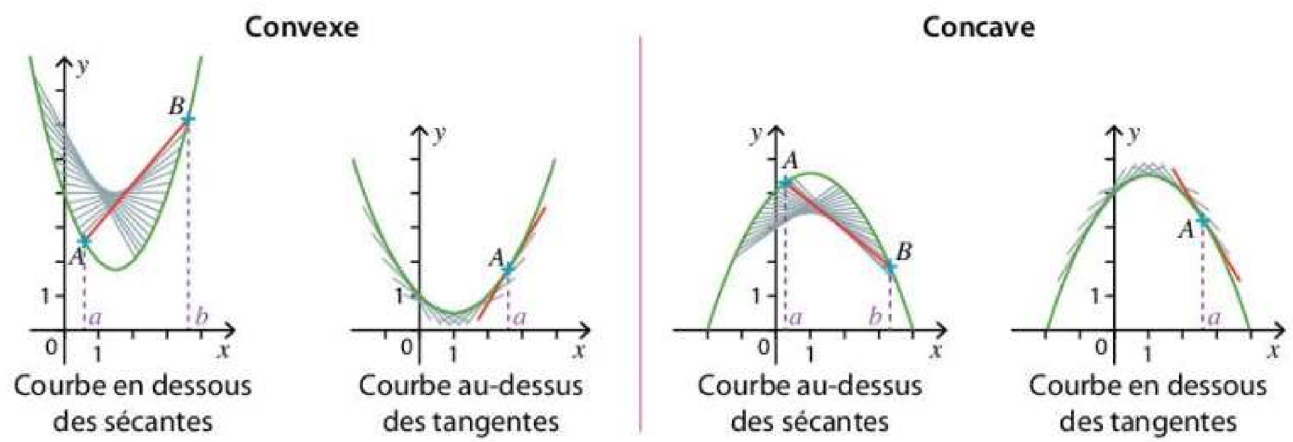
Nous venons donc de voir que pour étudier la convexité d’une fonction *f*, il fallait étudier les variations de la fonction *f* ’. Or nous savons que pour étudier les variations d’une fonction, il faut étudier le signe de sa fonction dérivée (cours de 1$^{\text{ière}}$). Il s’agit donc ici de déterminer **la fonction dérivée de la fonction *f* ’, notée *f* ’’ et appelée dérivée seconde de la fonction *f***, et d’en déterminer son signe.

Théorème 2 :
Soit *f* une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- *f* convexe sur I équivaut à *f* ’’positive sur I
- *f* concave sur I équivaut à *f* ’’ négative sur I
- la courbe représentative de *f* possède un point d’inflexion au point d’abscisse *a* équivaut à *f* ’’ s’annule et change de signe en *a*

Remarque :
Si *f* est convexe sur I, alors sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes et en-dessous de ses sécantes sur I, et réciproquement.
Si *f* est concave sur I, alors sa courbe représentative est en-dessous de ses tangentes et au-dessus de ses sécantes sur I, et réciproquement.

Illustration de la remarque :



<u>Exemple et point méthode :</u>
Etudier la convexité de la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.

Nous commençons par dériver *f* puis *f'* :
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 3$
$f''(x) = 6x - 12$

f'' s'annule pour $x = 2$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de f''	$-$	0	$+$
Variations de f'	↘		↗
Convexité de f	*f est concave*		*f est convexe*

Conclusion : *f* est concave sur $]-\infty\,;2]$
f est convexe sur $[2\,;+\infty[$
La courbe représentative de *f* possède un point d'inflexion de coordonnées $(2\,;-9)$ (car $f(2) = -9$)

<u>A faire vous-même 6</u>
Etudier la convexité de la fonction définie sur ℝ par : $f(x) = (x-2)e^{-2x}$.