Le calcul littéral, fil rouge d'une année de mathématiques en $4^{ème}$

ou

Proposition de progression pour la construction des compétences algébriques attendues en classe de $4^{ème}$

Document rédigé par

- *Stéphane Percot, professeur au collège Haxo de La Roche-sur-Yon et IATICE de mathématiques*
- *Yannick Danard professeur au collège Clément Janequin - Avrillé*
- *Emmanuel Malgras professeur au collège Pierre et Marie Curie - Le Pellerin*
- *Grégory Maupu professeur au collège Milcendeau - Challans*

Introduction :

« ***Faire des mathématiques*** » c'est « ***résoudre des problèmes*** ». Mais il est difficile de résoudre des problèmes sans un minimum de technique… L'enseignement des mathématiques cherche donc, à partir du cycle central du collège, à développer chez les élèves, des compétences algébriques leur permettant d'accéder à des nouvelles stratégies de résolution de problèmes.

Ce document, fruit de la réflexion d'un groupe de travail de quatre enseignants de collège n'ambitionne que de proposer un exemple de progression pour l'année de $4^{ème}$ avec les compétences de calcul littéral et les compétences de résolution de problème comme fil conducteur.

Plusieurs principes ont guidé nos choix et nos propositions :

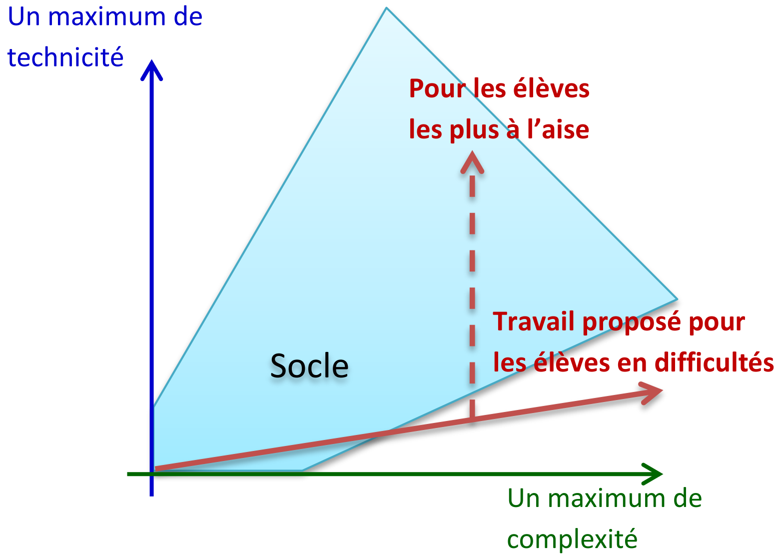
a) Nous souhaitons que les pratiques pédagogiques, qui peuvent être adoptées pour renforcer la maîtrise calculatoire des élèves, ne soient pas mises en œuvre au détriment des activités de recherche de problèmes. En particulier, l'activité mathématique d'un élève fragile ne doit absolument pas se résumer à l'acquisition de technique calculatoire. Tout élève, y compris le plus fragile, doit prioritairement apprendre à résoudre des problèmes (ouverts).

b) Dans le cadre de la construction de ces nouvelles techniques calculatoires, il est nécessaire de **différencier les attendus.** Les élèves qui ont du potentiel peuvent avoir un entraînement technique supplémentaire. Ils auront besoin durablement d'une solide maîtrise calculatoire. Par leurs capacités à automatiser certains calculs, à proposer des stratégies de résolution de problèmes nouvelles, les outils numériques sont un bon moyen de différencier la pédagogie.

c) Pour c**onstruire des automatismes il faut s'entraîner régulièrement, suffisamment, par petites touches et de façon récurrente,** de manière à donner à chaque élève toutes les chances de se les approprier. On peut donc s'autoriser à travailler la technique même si n**ous limitons le plus possible le nombre des règles calculatoires données.**

Le schéma ci-contre résume la philosophie de nos travaux avec les élèves :

- Il y a ce que nous considérons comme **INCONTOURNABLE** : que chaque élève, y compris le plus fragile, soit en activité de résolution de problème.
- Et il y a ce qui nous parait **SOUHAITABLE** : qu'un élève puisse résoudre un problème pleinement, en utilisant une stratégie experte, et donc souvent algébrique.



Ainsi, les travaux à privilégier pour les élèves fragiles vont vers **moins de technicité** opératoire et algébrique mais font la part belle à la **complexité des problèmes** à résoudre (problèmes concrets, problèmes ouverts, taches complexes). Cependant, à aucun moment nous n'oublions que toute situation de recherche est une bonne occasion pour travailler aussi la technique. Et nous ne manquons pas les occasions permettant aux élèves les plus rapides de monter en compétence technique.

Pour la suite, nous avons choisi de décomposer notre document en une progression en 5 temps, qui peuvent correspondre aux 5 périodes de l'année (découpées par les vacances scolaires), mais qui peuvent aussi s'adapter aux progressions spiralées permettant car la construction des compétences et des techniques algébriques méritent un enseignement « par petites touches et de façon récurrente ».

Au sujet du programme et des travaux algébriques de la classe de quatrième

	Le programme - Le socle	**Pratiques et remarques**	***Enjeux pour plus tard***
Calcul littéral Manipulations d'écritures littérales	Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités k(a + b)= ka + kb et k(a − b)= ka − kb dans les deux sens. *(voir temps 1)* Calculer la valeur d'une expression littérale. Tester une égalité. *(voir temps 1)* Connaître le sens des mots « développer », « réduire », « factoriser » *(voir temps 2)* Réduire une expression littérale *(voir temps 2)* Développement de (a+b)(c+d) *(voir temps 4)*	Veiller à ce que les élèves puissent justifier oralement leurs explications. Etudier pourquoi 2 + 3*x* ne se réduit pas au contraire de 2*x*+3*x*. *(voir temps 1)* Multiplier les approches de la double distributivité *(voir temps 4)*	*Le calcul littéral sera utilisé dans toutes les classes suivantes mais on veillera à ne pas travailler la technique au détriment de la richesse et de la complexité des situations mathématiques étudiées.* *On pourra aller plus loin dans les exigences techniques avec les élèves les plus à l'aise.*
Autour des équations	Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue. *(voir temps 3)* Savoir dire si un nombre est solution d'une équation. *(voir temps 3)* Savoir résoudre une équation du type ax+b = c *(voir temps 3)*, une équation du type ax+b = cx+d *(voir temps 5)*	Mise en place très progressive, de la cinquième à la seconde de la différence pour l'élève entre égalité et équation. Savoir verbaliser sa démarche. Autoriser tout type de démarche de résolution de ces équations sans s'interdire de travailler des techniques précises *(voir temps 3 et 5)*.	*Les équations sont un des moyens très utilisés pour résoudre toutes sortes de problèmes, dans toutes les disciplines scientifiques.* *On s'attachera cependant à valoriser tout type de démarche de résolution de problème en montrant aux élèves que les méthodes algébriques sont parfois un bon moyen d'être efficace…*

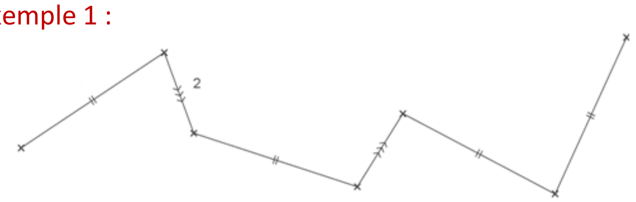
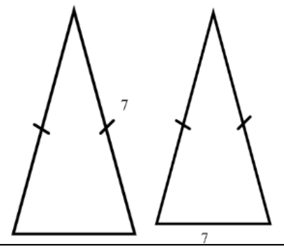
TEMPS 1 :

L'objectif de cette période est de renforcer la maîtrise du calcul numérique (sens des opérations, vocabulaire des opérations, tables de multiplication, automatismes de calculs avec les nombres entiers relatifs, calculs simples autour des fractions) mais aussi de réactiver des compétences travaillées en $5^{ème}$ autour de la lettre (construction de formules, test d'égalité, sens des égalités).

a) Entre autres travaux, les activités autour des programmes de calculs peuvent être adaptées pour renforcer la maîtrise du calcul numérique.

Exemple 1 : On considère le programme de calcul suivant : . multiplier par 3 . ajouter 5 à ce produit 1) Appliquer ce programme au nombre 4. 2) Appliquer ce programme au nombre 2/3. 3) Appliquer ce programme au nombre 1/5 4) On a appliqué ce programme à un nombre et a trouvé 23 comme résultat. Quel était le nombre de départ ?	Exemple 2 : On considère le programme de calcul suivant : $\dots \xrightarrow{\times 5} \dots \xrightarrow{-10} \dots$ 1) Appliquer ce programme au nombre 4. 2) Appliquer ce programme au nombre (-3) 3) On a appliqué ce programme à un nombre et a trouvé 23 comme résultat. Quel était le nombre de départ ?	Exemple 3 : Quel programme de calcul peut-on associer à chacune des expressions suivantes : 1) $2\times a + 7$ 2) $2\times(a+7)$ 3) $a^2 - 15$ 4) $a^2 + a - 7$ 5) $3a^2 - 2a + 4$ en n'hésitant pas à rappeler que cela signifie $3\times a^2 - 2\times a + 4$

b) Les programmes de calculs permettent de revenir sur les priorités opératoires, de construire des formules et il est important de proposer d'autres types de support pour montrer la construction de formules dans d'autres cadres.

Exemple 1 :  *L'unité de longueur est le cm.* Ecrire la longueur de cette ligne brisée.	Exemple 2 :  Exprimer le périmètre de ces triangles.

c) On peut aussi retravailler sur des activités autour de l'aire d'un rectangle coupé pour revoir la distributivité.

d) Il faut aussi travailler le passage d'une suite de calculs isolés à un calcul avec expression. Pour cela on pourra chercher à appliquer un programme de calcul en présentant les résultats de ces programmes de deux manières :

- Par des calculs « fléchés » enchainant les opérations (une suite de calculs isolés).
- En écrivant une expression numériques enchainant les calculs (sans forcément calculer)
Ceci n'est pas installé chez les élèves arrivant en $4^{ème}$.

e) On peut, en parallèle, travailler le passage à une formule tableur pour automatiser des calculs répétitifs

Voici quelques liens vers des gammes et des activités rapides que l'on peut mener à ce stade de l'année de $4^{ème}$:

[temps1 Suite de nombres] [temps1 suite de nombres2] [temps1 factoriser]
[temps1 programmes de calculs] [temps1 calcul et tableur]

Voici quelques liens vers des activités plus ouvertes que l'on peut mener à ce stade de l'année de $4^{ème}$:

[L'ardoise de mes ardoises] [Premières marches] [Est fonction de] [Le job d'été]

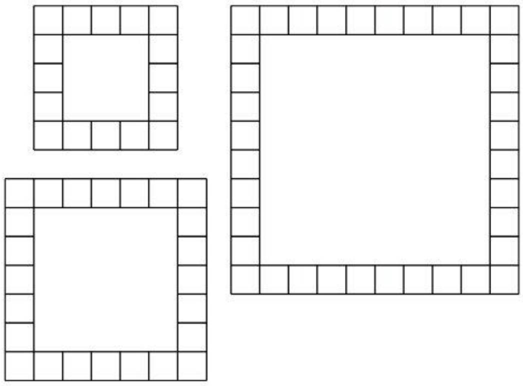
Temps 2 :

L'objectif de cette période est de (re)donner sens au passage à la lettre et travailler quelques incontournables techniques sur les écritures littérales (simplification et réduction d'écritures)

a) On s'attachera, en particulier, à mener à nouveau des activités (re)donnant sens à la lettre

Exemple :

Pierre joue avec des carreaux de mosaïque.
Il dispose ses carreaux pour obtenir des cadres carrés.
En voici trois (ci-contre).
Il se demande en jouant, s'il peut savoir à l'avance combien de carreaux de mosaïque il lui faut pour fabriquer n'importe quel cadre.
Pouvez-vous l'aider ?



b) Et on poursuivra les travaux sur les programmes de calcul :

Exemple :

Ce programme de calcul contient 4 consignes.
. ajouter 7
. multiplier par 6
. enlever 3
. diviser par 2

1) Ecrire ce programme sous forme d'une expression algébrique.
2) Ecrire un programme de calcul équivalent mais ayant seulement 2 consignes.
3) Récrire alors ce nouveau programme sous la forme d'une expression algébrique.

c) Les activités menées doivent aussi permettre de travailler la réduction des écritures littérales :

Exemple :

Réduire, si possible, les écritures suivantes :

. $2a + 2a$	. $2a + 3a$	. $4 + 2a$
. $t + 5 + t + 5 + t + 5$	. $3t+5-2t$	. $t^2 +2t +3 -7t$
. $4a^2 + a^2$		

d) On continuera donc de multiplier les activités rapides et mentales utilisant des lettres :

. Calculer des périmètres, des aires, des volumes à l'aide de formules.
. Chercher la valeur de a dans des égalités du type $8 + a = 12$.
. Appliquer un programme de calculs.
. Trouver une formule et justifier que plusieurs formules conviennent.

e) Dans les problèmes de recherches, il faut autoriser toutes les stratégies.

Les outils numériques peuvent aussi être des outils de différenciation, des outils intéressants pour résoudre des problèmes.

Voici quelques liens vers des gammes et des activités rapides que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :

Temps2 Développer

Voici quelques liens vers des activités plus ouvertes que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :

Les cadres de Pierre   La piscine

Temps 3 :

L'objectif de cette période est de l'utilisation de la lettre pour résoudre un problème et avancer dans la technique de résolution des équations (du type ax+b = c). On souhaite également poursuivre le travail sur les écritures littérales (pour assoir l'utilisation de la distributivité et préparer la double distributivité).

Les problèmes du type « ax+b = c » n'exigent pas des techniques de résolution expertes. De multiples points de vue peuvent être travaillés avec les élèves :

a) En prérequis, on doit d'abord s'assurer que les élèves maitrisent le sens des opérations, en posant des questions du type :

Quel est le nombre qui multiplié par 7 donne 21 ? qui multiplié par 7 donne 13 ?
Quel nombre faut-il ajouté à 8 pour trouver 5 ?

b) Pour préparer la notion d'équation, on peut alors leur faire écrire des égalités face à des questions du type :

Par quelle égalité traduit-on la phrase :
«Quel est le nombre qui multiplié par 8 donne 22 ? »
«Quel est le nombre qui ajouté à 8 donne 22 ? »

Programme : Multiplier par (-5) ; Ajouter 3
Par quelle égalité traduit-on la phrase :
« Quel nombre faut-il choisir pour trouver 0 ? »

c) On peut alors introduire le vocabulaire spécifique aux équations.
La résolution des équations du type ax+b = c pouvant se faire de plusieurs façons :
- à l'aide de programme de calcul qu'on remonte,
- avec des opérations à trous.

On peut continuer à accepter et valoriser des résolutions par stratégie d'essai – erreur…

Exemple : Pour résoudre les équations suivantes 3x= 5 ; x + 9 = -6 ; 3x – 7 = 4
On peut présenter la résolution :

3x – 7 = 4 donc ? - 7 = 4 donc ? = 11 et donc 3x = 11 c'est-à-dire x =11/3

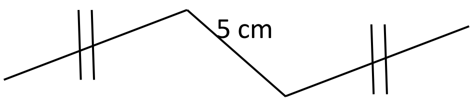
d) Parallèlement, on continue les activités sur le test d'égalités (à la main, à la calculatrice). La notion de « solution d'équation » est à nouveau aborder par ce type d'activité.

Exemples :
L'égalité 5 – 3x = 2x est-elle vraie pour x = 2 ?
1 est-il solution de 5 – 3x = 2x
3(5x – 2) = 15x – 6 vrai ou faux ?
3(5x – 2) = 5(3x – 1) vrai ou faux ?
Résoudre l'équation 5(2x - 1) = 9 (traitable à la main, au tableur ou de manière experte)

e) On n'oublie pas de proposer des situations géométriques pouvant se ramener à ce type d'équation :

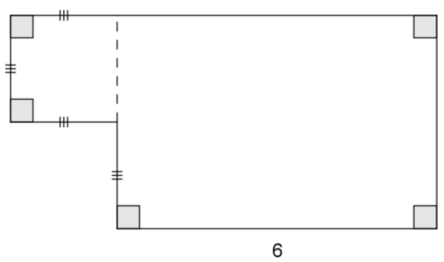
Exemples :

La longueur de la ligne brisée est de 34 cm.



Quel est la longueur du segment manquant ?
Ou le segment manquant mesure-t-il 12 cm ?

Le périmètre est de 72 cm.
Quelle est la longueur du segment codé ?



Voici quelques liens vers des gammes et des activités rapides que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :
[Temps3 Equations]

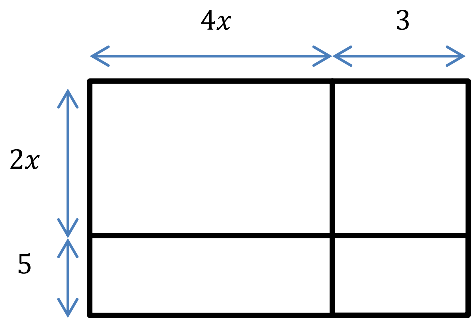
Voici quelques liens vers des activités plus ouvertes que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :
[les lapins de Fibonacci] [Le magicien] [Solutions d'une équation]

Temps 4 :

L'objectif de cette période est la découverte de la double distributivité et à nouveau un temps de travail sur les développements et réductions d'écritures littérales.

a) On peut poursuivre, en activités rapides, le travail utilisant la distributivité et plus particulièrement la partie développement.

b) On peut introduire la double distributivité de plusieurs façons :



- à l'aide d'une situation géométrique (aire des rectangles).

Exemple 1 : Calculer l'aire du grand rectangle ci-contre :

- On peut aussi privilégier des points de vue numériques, utilisant la simple distributivité :

Exemple 2 : On donner à développer les trois expressions. On les corrige. On interroge les élèves sur leurs idées pour développer la quatrième expression.

$$(4x+3)\times A = 4x \times A + 3 \times A$$
$$4x \times (2x+5) = 8x^2 + 20x$$
$$3 \times (2x+5) = 6x + 15$$
$$(4x+3)\times(2x+5) = \cdots$$

Exemple 3 : On fait développer d'abord : $2x(x+3)$ et $7(x+3)$ puis on demande de trouver le lien avec $(2x+7)(x+3)$.

c) Une fois la double distributivité introduite, il est utile de varier les approches techniques :

Exemple pour $(4x+3)(2x+5)$:

<table>
<tr>
<td>$(4x+3)(2x+5) = 4x(2x+5)+3(2x+5)$

$(4x+3)(2x+5) = 4x\times2x + 4x\times5 + 3\times2x+3\times5$

$(4x+3)(2x+5) = 8x^2 + 20x + 6x+15$

$(4x+3)(2x+5) = 8x^2 + 26x+15$</td>
<td>$4x + 3$
$\times\ 2x + 5$
$20x + 15$
$8x^2 + 6x$
$8x^2 + 26x + 15$</td>
<td><table><tr><td>$\times$</td><td>$4x$</td><td>$+3$</td></tr><tr><td>$2x$</td><td>$8x^2$</td><td>$+6x$</td></tr><tr><td>$+5$</td><td>$+20x$</td><td>$+15$</td></tr></table>On ajoute et on obtient
$8x^2+26x+15$</td>
</tr>
</table>

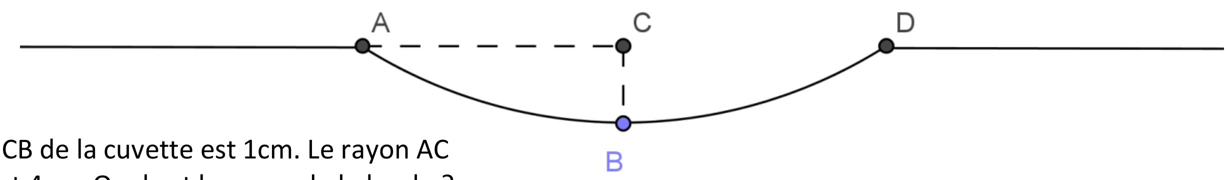
Voici quelques liens vers des gammes et des activités rapides que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :

Temps4_développer temps4_factoriser

Voici quelques liens vers des activités que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :

Double distributivité

Une boule a été posée sur du sable supposé parfaitement plat. En enlevant la boule, on observe cette forme en cuvette :



La profondeur CB de la cuvette est 1cm. Le rayon AC de la cuvette est 4cm. Quel est le rayon de la boule ?

Temps 5 :

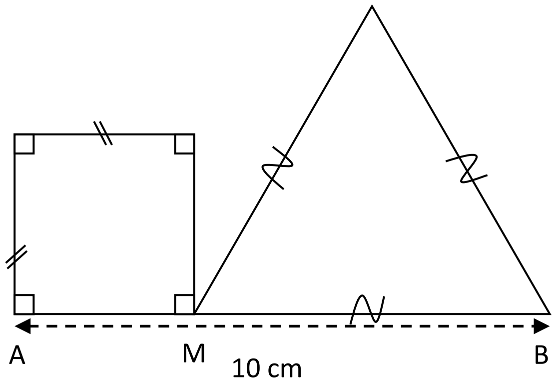
L'objectif de cette période est un travail autour la technique de résolution des équations (du type ax+b = cx+d) en donnant, plus que jamais, une part importante à la résolution de problèmes.

a) Les activités rapides peuvent encore nous permettre d'aller vers certains problèmes en lien avec ce type d'équation :

- Tester si une ou plusieurs valeurs vérifient que $3x + 4 = x + 2$
- Trouver une solution de l'équation $3x + 4 = x + 2$ (sans technique particulière : tableur, calculatrice…)

b) Certains problèmes ouverts peuvent se ramener à des équations du type ax+b = cx+d :

Exemple géométrique :
Sur un segment [AB] de longueur 10 cm (on pourra choisir 7 cm pour une approche « en douceur »). Problème Trouver la distance AM pour que le carré et le triangle équilatéral est le même périmètre.



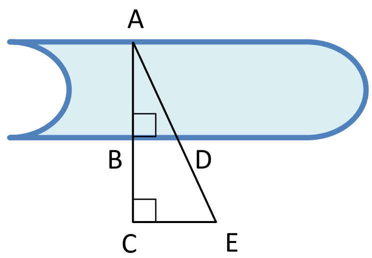
c) Les techniques de résolution de telles équations sont nombreuses.
. Activité utilisant la balance de Roberval.
. Mise en évidence des propriétés algébriques des égalités (« une égalité reste vraie si on ajoute dans chaque membre un même nombre… »)
. Activité calculatoire utilisant la décomposition d'un terme « en x » en deux termes pour simplifier.

Exemple : $7x + 3 = 2x - 5$
$5x + 2x + 3 = 2x - 5$
$5x + 3 = -5$

d) Les problèmes numériques plus complexes pouvant se ramener à des équations du type ax+b = cx+ d sont nombreux mais on pourra aussi faire vivre des problèmes géométriques :

Exemple : Déterminer la largeur de la rivière sachant que si on vise perpendiculairement un arbre (en A) qui se trouve sur le bord opposé de la rivière selon le schéma ci-contre, il n'a pu effectuer que les trois mesures

$BC = 1\ m$, $BD = 2m$ et $CE = 3\ m$.



Voici quelques liens vers des gammes et des activités rapides que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :
[Temps5 équations]

Voici quelques liens vers des activités plus ouvertes que l'on peut mener à ce stade de l'année de 4ème :
[la calculatrice d'Alice] [Equations en 4ème] [Crayons et cahiers]