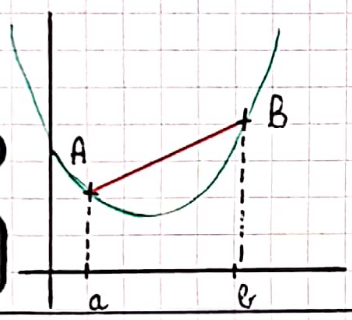
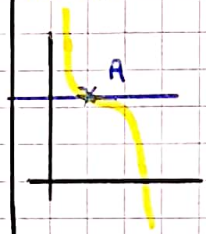
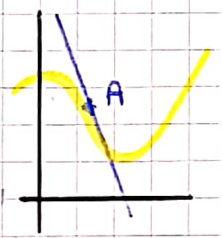
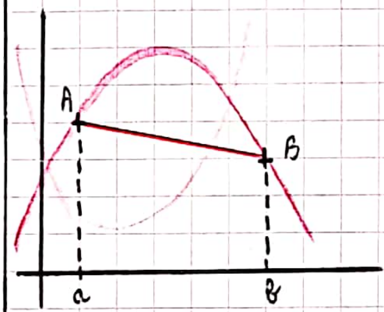
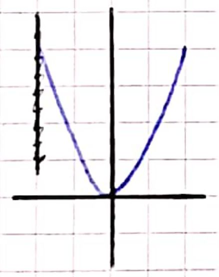
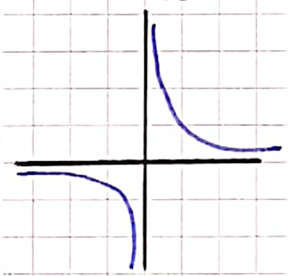
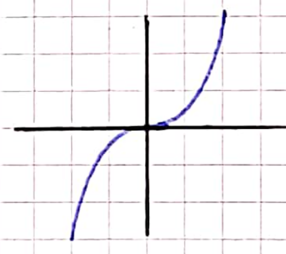
CONVEXITÉ

Elisa Merrault

I - Vocabulaire

CONVEXE	POINT D'INFLEXION	CONCAVE
f est convexe sur I si, pour tous réels a et b de I, la portion de la courbe $\mathcal{C}$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est en dessous de la sécante (AB).	On appelle point d'inflexion de $\mathcal{C}$, tout point de $\mathcal{C}$ en lequel f change de convexité. A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}$ admet une tangente en A et si $\mathcal{C}$ traverse cette tangente en A.	f est concave sur I si, pour tous réels a et b de I, la position de la courbe $\mathcal{C}$ située entre les points $A(a\,;f(a))$ et $B(b\,;f(b))$ est au dessus de la sécante (AB)
		

$f(x)=x^2$	$g(x)=\sqrt{x}$	$h(x)=\frac{1}{x}$	$K(x)=e^x$	$l(x)=x^3$
				
On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}$	On dit que g est concave sur $[0\,;+\infty[$.	h est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$	K est convexe sur $\mathbb{R}$	l est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$ point d'inflexion aux coordonnées $(0\,;0)$

II - Vitesse de croissance

- Pour une fonction convexe les images croissent de + en + vite.
- Pour une fonction concave les images croissent de − en − vite.

III - Lien entre convexité et dérivation

- Si une fonction est convexe, alors les pentes de ses tangentes augmentent
- Si une fonction est concave, alors les pentes de ses tangentes diminuent
- Si une fonction possède un point d'inflexion, alors la tangente en ce point traverse la courbe en ce point

Théorème 1 :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f convexe sur I équivaut à f' croissante sur I
- f concave sur I équivaut à f' décroissante sur I
- La courbe représentative de f possède un point d'inflexion au point d'abscisse a équivaut à f' change de variation en a

Théorème 2 :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f ~~est~~ convexe sur I équivaut à f'' positive sur I
- f concave sur I équivaut à f'' négative sur I
- la courbe représentative de f possède un point d'inflexion au point d'abscisse a équivaut à f'' s'annule et change de signe en a.

Méthode

Pour étudier la convexité d'une fonction f il faut donc :

- étudier le signe de f'' pour déterminer les variations de f'.
- déterminer si f est convexe ou concave ou si elle a un point d'inflexion.