# Thème : Quelques applications des matrices

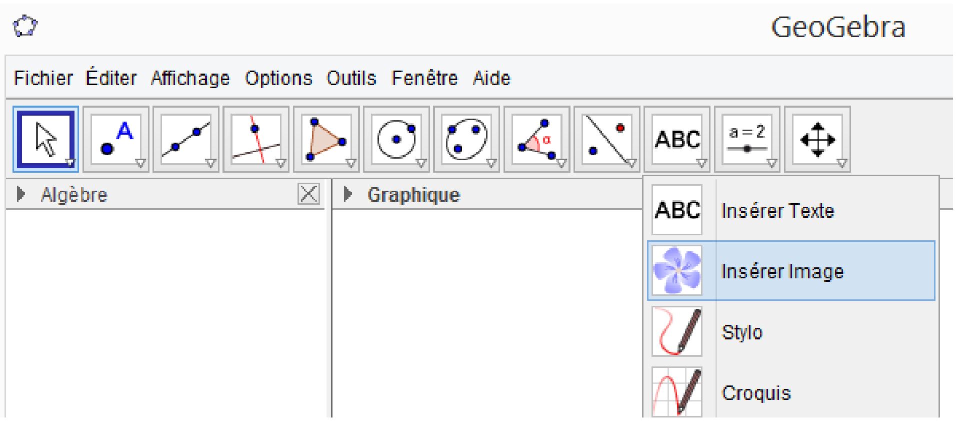
## Activité 1. Transformations et matrices

Pré requis : Manipulation de GeoGebra. Connaissance des matrices. Nombres complexes.
Objectif : Découvrir que les matrices peuvent représenter des transformations connues ou non.

**Partie A : *Découverte à l'aide de GeoGebra***

1) Ouvrir le logiciel GeoGebra et insérer une figure de votre choix en suivant cette procédure :

    - Cliquer sur le bouton **ABC** et choisir « Insérer Image ».




    - Cliquer dans la page, partie graphique. Parcourir ses répertoires et insérer la figure.
    - Par un clic droit dessus, la renommer « figure1 ».

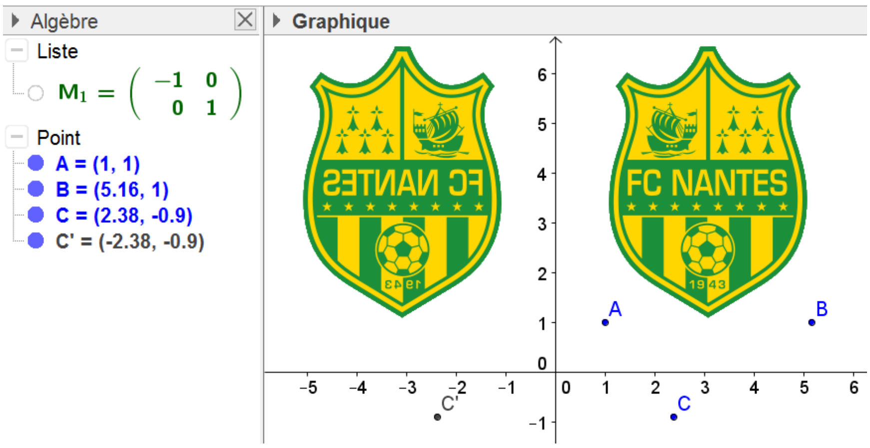
2) Déplacer la **figure1** à l'aide de l'outil  afin que celle-ci soit située au-dessus de l'axe des abscisses et à droite de l'axe des ordonnées.

**Partie B : *Premières transformations***

1) Entrer la matrice $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en écrivant dans la zone de saisie (en bas) la formule M_1={{-1,0},{0,1}} puis appuyer sur Entrée.

2) Transformer la figure1 par la matrice $M_1$ en écrivant AppliquerMatrice[M_1,figure1] puis appuyer sur Entrée. Quelle transformation semble avoir été appliquée à la figure1 ?

3) Créer un point C dans le plan. L'image C' du point C est obtenue en écrivant dans la zone de saisie C'=M_1*C. On obtient un écran analogue à celui-ci :



4) Déplacer le point C et observer C'. Que peut-on conjecturer sur les coordonnées de C et C' ?

5) Soit $(x; y)$ les coordonnées de C et $(x'; y')$ celles de C'. L'écriture C'=M_1*C sur le logiciel signifie que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$ et justifier l'effet de la matrice $M_1$ sur la figure1.

b) En déduire la nature de la transformation associée à la matrice $M_1$.

6) D'autres symétries :

a) On considère la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Quelle matrice $M_2$ associe-t-on à cette transformation ?

b) Ecrire la matrice $M_2$ dans GeoGebra et vérifier qu'elle permet de transformer la figure1 et le point C par la symétrie d'axe $(Ox)$

c) On considère la symétrie centrale de centre $O$. Quelle matrice $M_3$ associe-t-on à cette transformation ?

d) Ecrire la matrice $M_3$ dans GeoGebra et vérifier qu'elle permet de transformer la figure1 et le point C par la symétrie centrale de centre $O$.

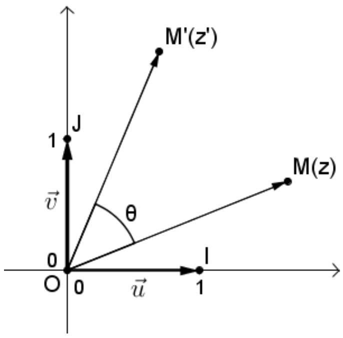
**Partie C :** ***Autres transformations***

1) On veut déterminer une matrice $M_4$ permettant d'obtenir l'image de la figure de départ (figure1) par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.

- Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère le point $M(x; y)$ d'affixe $z = x + iy$.

  On note $M'(x'; y')$ d'affixe $z' = x' + iy'$ son image par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$.

- Dire que $M'$ est l'image de $M$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ signifie :




$$\begin{cases} OM' = OM \\ \left(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}\right) = \theta + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

a) Traduire ces deux égalités à l'aide de $z$ et de $z'$.

b) En déduire que $z' = e^{i\theta} z$.

2) En utilisant la forme algébrique de $z$, de $z'$ et de $e^{i\theta}$, en déduire que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_4 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ où $M_4$ est une matrice carrée d'ordre 2 dont les coefficients ne dépendent que de $\theta$.

3) Donner la matrice $M_4$ pour $\theta = \pi$. Que retrouve-t-on ?

4) a) Donner la matrice $M_5$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. Ecrire la matrice $M_5$ dans GeoGebra et vérifier qu'elle permet de transformer la figure1 et le point C par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) Donner la matrice $M_6$ pour $\theta = \frac{\pi}{3}$. Ecrire la matrice $M_6$ dans GeoGebra et vérifier qu'elle permet de transformer la figure1 et le point C par la rotation de centre $O$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

5) a) Calculer les produits $M_5 \times M_6$ et $M_6 \times M_5$.

b) On pose $M_7 = M_5 \times M_6$. Que peut-on dire de la transformation associée à la matrice $M_7$ ?