Thème : Quelques applications des matrices

Correction de l'activité 1. Transformations et matrices

Partie A ***Découverte à l'aide de GeoGebra***

Les deux questions permettent d'obtenir un contenu équivalent à celui du fichier **transformations_et_matrices.ggb.**

Partie B ***Premières transformations***

Les trois premières questions permettent d'obtenir un contenu équivalent à celui du fichier **transformations_et_matrices.ggb.**

4) On conjecture que $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

5) On a $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Ainsi, puisque $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, en effectuant le produit matriciel, on obtient $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$. La conjecture faite à la question 4) est donc justifiée.

   b) La figure1 est un ensemble de points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Les coordonnées de chaque point sont transformées en $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ qui sont les coordonnées des points de la figure symétrique de la figure1. La transformation associée à la matrice M_1 est donc la symétrie d'axe (Oy).

6) a) Dans la symétrie d'axe (Ox), l'abscisse des points est invariante donc $x' = x$. Par contre l'ordonnée est transformée en son opposée donc $y' = -y$. La matrice associée à cette transformation est donc :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   b) On écrit M_2 dans GeoGebra. Elle correspond effectivement à la symétrie d'axe (Ox). Voir le fichier **transformations_et_matrices.ggb.**

   c) Dans la symétrie de centre O, l'abscisse des points est transformée en son opposée donc $x' = -x$. De plus, l'ordonnée est également transformée en son opposée donc $y' = -y$. La matrice associée à cette transformation est donc :

$$M_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   d) On écrit M_3 dans GeoGebra. Elle correspond effectivement à la symétrie de centre O. Voir le fichier **transformations_et_matrices.ggb.**

Partie C ***Autres transformations***

1) a) Traduction de la définition de la rotation à l'aide de z et de z'.

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') - \arg(z) = \theta + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

b) Déduction de la relation entre z et z'.

$z' = e^{i\theta} z$ équivaut successivement à $\begin{cases} |z'| = |e^{i\theta} z| \\ \arg(z') = \arg(e^{i\theta} z) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\begin{cases} |z'| = |e^{i\theta}| \times |z| \\ \arg(z') = \arg(e^{i\theta}) + \arg(z) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z'| = 1 \times |z| \\ \arg(z') = \theta + \arg(z) + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |z'| = |z| \\ \arg(z') - \arg(z) = \theta + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Conclusion :</u>

En utilisant le résultat de la question 1)a), on a :

$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ équivaut à $z' = e^{i\theta} z$.

2) En utilisant les formes algébriques $z' = x' + iy'$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z = x + iy$, on a :

$$x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)$$

En développant, on a :

$$x' + iy' = x\cos\theta + i\,y\cos\theta + i\,x\sin\theta - y\sin\theta$$

$$x' + iy' = x\cos\theta - y\sin\theta + i(y\cos\theta + x\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire avec des matrices :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Donc

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M_4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $M_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

3) Dans le cas où $\theta = \pi$, on a $M_4 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$ $\quad M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

On retrouve la matrice de la symétrie centrale. Effectivement la symétrie de centre O est la même transformation que la rotation de centre O et d'angle π.

4) a) Dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $M_5 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ $\quad M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On écrit dans GeoGebra M_5={{0,-1},{1,0}}

Elle correspond effectivement à la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Voir le fichier **transformations_et_matrices.ggb.**

b) Dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{3}$, on a $M_6 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}$ $\quad M_6 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On écrit dans GeoGebra M_6={{1/2,-sqrt(3)/2},{ sqrt(3)/2, 1/2}}

Elle correspond effectivement à la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Voir le fichier **transformations_et_matrices.ggb.**

5) a) $M_5 \times M_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$M_5 \times M_6 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$M_6 \times M_5 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$M_6 \times M_5 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

b) On a :

$$M_7 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Pour toute matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a :

$$M_7 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M_6 \times M_5 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Or $M_5 \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont les coordonnées du point $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ image du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Puisque les coordonnées de M' sont à leur tour multipliée par la matrice M_6 de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on en déduit que la matrice M_7 est la matrice de la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivie de la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$.

<u>Conclusion :</u>

M_7 est la matrice de la **rotation de centre $\boldsymbol{O}$**, d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$**.**