# Thème : Les nombres premiers

## Corrigé de l'activité 1. Autour des nombres premiers (6 exercices)

**Exercice 1 *Nombres croisés***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | A | B | C | D | E |
| 1 | **9** | **6** | **7** | **2** | **1**  Remarque : l'ordre n'est qu'indicatif. Certaines étapes peuvent être permutées. |
| 2 | **4** | **9** | **4** | 9 |  |
| 3 | **9** | **7** | **3** |  | **3** |
| 4 | **4** | **4** | **4** | **2** | **3** |
| 5 | **9** |  | **7** | **7** | **8** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Emplacement 3b | Le reste de la division euclidienne de 2001 par 9 est égal à **3**. |
|  | Emplacement Ea | **1** est le seul entier positif n'admettant qu'un seul diviseur positif (tous les autres entiers positifs ont au minimum deux diviseurs positifs : 1 et eux-mêmes). |
|  | Emplacement Eb | Le produit de ses chiffres est et l'emplacement comporte trois cellules.  Donc les seuls produits possibles sont :  ; ; ; .  La condition "seul son dernier chiffre est pair" impose donc que le chiffre des unités soit 8 et donc que le nombre soit égal à **338**. |
|  | Emplacement 5b | Le produit de ses chiffres est et l'emplacement comporte trois cellules.  Donc le seul produit possible est .  Le ayant déjà été placé, on déduit que le nombre est égal à **778**. |
|  | Emplacement Db | Les cubes parfaits à deux chiffres sont et . Un ayant déjà été placé dans la cellule D5, **27** est la seule possibilité. |
|  | Emplacement 4 | Le nombre est formé d'une permutation des chiffres 2, 3, 4, 4, 4.  2 et 3 étant déjà placés le nombre est égal à **44423**. |
|  | Emplacement C | Le nombre est un palindrome. Le nombre finissant par 4 et 7 déjà placés, **commence donc par 74**. |
|  | Emplacement 2 | Les deux premiers chiffres sont respectivement les mêmes que les deux derniers chiffres. Un ayant déjà été placé dans la cellule C2, il y a donc aussi un **4 dans la cellule A2.** |
|  | Emplacement A | La somme de ses cinq chiffres est . Or, les chiffres et ont déjà été placés. La somme des trois chiffres manquants est égale à . Donc la seule possibilité est que les trois chiffres manquants soient **tous des** . |
|  | Emplacement 3a | Il s'agit d'un multiple de de trois chiffres. Un ayant déjà été placé dans la cellule A3, la seule possibilité est . |
|  | Emplacement 1 | Le produit des cinq chiffres est . Les chiffres ayant déjà été placés, il reste à placer deux chiffres dont le produit est . Ces deux chiffres ne peuvent donc qu'être ou bien . Le nombre ne peut donc être que 9**4**7**3**1 ou 9**3**7**4**1 ou 9**2**7**6**1 ou 9**6**7**2**1. Or ce doit être un carré parfait. Seul 96721 convient. |
|  | Emplacement D | C'est un nombre premier à deux chiffres commençant par un . Seuls 23 ou 29 peuvent convenir. |
|  | Emplacement 2 | Les cellules A2 et C2 contiennent déjà un . La cellule D2, d'après l'étape précédente, contient soit un , soit un . Donc seuls **4343** ou **4949** peuvent convenir. |
|  | Emplacement B | D'après l'étape précédente, les deux seuls nombres possibles sont 6374 et 6974.  Seul **6974** est divisible par 11. Donc la cellule B2 contient un **9** et le nombre de l'emplacement Da est **29**. |

**Exercice 2 *Le crible d'Eratosthène***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 2 | 3 | ~~4~~ | 5 | ~~6~~ | 7 | ~~8~~ | ~~9~~ |
| ~~10~~ | 11 | ~~12~~ | 13 | ~~14~~ | ~~15~~ | ~~16~~ | 17 | ~~18~~ | 19 |
| ~~20~~ | ~~21~~ | ~~22~~ | 23 | ~~24~~ | ~~25~~ | ~~26~~ | ~~27~~ | ~~28~~ | 29 |
| ~~30~~ | 31 | ~~32~~ | ~~33~~ | ~~34~~ | ~~35~~ | ~~36~~ | 37 | ~~38~~ | ~~39~~ |
| ~~40~~ | 41 | ~~42~~ | 43 | ~~44~~ | ~~45~~ | ~~46~~ | 47 | ~~48~~ | ~~49~~ |
| ~~50~~ | ~~51~~ | ~~52~~ | 53 | ~~54~~ | ~~55~~ | ~~56~~ | ~~57~~ | ~~58~~ | 59 |
| ~~60~~ | 61 | ~~62~~ | ~~63~~ | ~~64~~ | ~~65~~ | ~~66~~ | 67 | ~~68~~ | ~~69~~ |
| ~~70~~ | 71 | ~~72~~ | 73 | ~~74~~ | ~~75~~ | ~~76~~ | ~~77~~ | ~~78~~ | 79 |
| ~~80~~ | ~~81~~ | ~~82~~ | 83 | ~~84~~ | ~~85~~ | ~~86~~ | ~~87~~ | ~~88~~ | 89 |
| ~~90~~ | ~~91~~ | ~~92~~ | ~~93~~ | ~~94~~ | ~~95~~ | ~~96~~ | 97 | ~~98~~ | ~~99~~ |

1. Les nombres entourés sont donc : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.
2. Chacun de ces nombres possèdent exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Le crible d'Eratosthène permet donc de générer les nombres premiers. La liste précédente est donc la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

**Exercice 3 *Tester la primalité (exercice identique à l’exercice 1 de l’activité 2 « Algorithmes sur les nombres premiers »)***

1. 107 n'est pas divisible par 2, 3, 5, …, 103 : c'est donc un **nombre premier**.

* 227 n'est pas divisible par 2, 3, 5, …, 223 : c'est donc **un nombre premier**.
* 375 est divisible par 5, ce n'est donc pas un nombre premier.
* 377 est divisible par 13, ce n'est donc pas un nombre premier.
* 379 n’est pas divisible par 2, 3, 5, …, 373 : c'est donc un **nombre premier**.
* 571 n'est pas divisible par 2, 3, 5, …, 569 : c'est donc un **nombre premier**.

1. Pour 107, il n'est pas utile de tester tous les nombres premiers de 2 jusqu'à 103. En effet, il est certes nécessaire de tester la division par 2, 3, …

Mais par exemple, le test de la division par 73 est inutile : E(107/73) = 1.

Les élèves auront tendance à énoncer le fait qu'il faut "s'arrêter" à 107/2.

Il faudra relancer le débat en demandant si l'on ne peut pas faire mieux…

Et ce jusqu'à obtenir que si est composé alors son plus petit diviseur noté est inférieur ou égal à .

Preuve : On suppose que a au moins un autre diviseur que 1 et lui-même. On appelle *le plus petit* de ces diviseurs.

Donc où est un diviseur de . Alors :

* il existe un second diviseur tel que
* Ce second diviseur est tel que . Donc

. Donc il faut et il suffit de tester la division par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 7.

1. On fait fonctionner l'algorithme sur le papier :

Pour

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  | 19 |  |
| 1er tour de boucle Tant que |  | 2 |
| 2e tour de boucle Tant que |  | 3 |
| 3e tour de boucle Tant que |  | 4 |
| 4e tour de boucle Tant que |  | 5 |
| Sortie de boucle car la condition ne divise pas est vraie et la condition est fausse |  |  |

L'affichage est PREMIER.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Pour , |  |  |  |
|  |  | 21 |  |
|  | 1er tour de boucle Tant que |  | 2 |
|  | 2e tour de boucle Tant que |  | 3 |
|  | Sortie de boucle car la condition ne divise pas est fausse et la condition est vraie |  |  |

L'affichage est NON PREMIER.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Pour , |  |  |  |
|  |  | 53 |  |
|  | 1er tour de boucle Tant que |  | 2 |
|  | 2e tour de boucle Tant que |  | 3 |
|  | 3e tour de boucle Tant que |  | 4 |
|  | 4e tour de boucle Tant que |  | 5 |
|  | 5e tour de boucle Tant que |  | 6 |
|  | 6e tour de boucle Tant que |  | 7 |
|  | 7e tour de boucle Tant que |  | 8 |
|  | Sortie de boucle car la condition ne divise pas est vraie et la condition est fausse |  |  |

L'affichage est PREMIER.

1. a) Programme TESTA

Programme TESTA sur TI

Prompt N

If N ≤ 3

Then

If N=2 ou N=3

Then

Disp "N PREMIER"

Else

Disp "N NON PREMIER"

End

Else

2I

While (partEnt(N/I)≠N/I) et (I≤ partEnt(√(N)))

I+1I

End

If partEnt(N/I)=N/I

Then

Disp "N NON PREMIER"

Else

Disp "N PREMIER"

End

End

Programme TESTA sur Casio

"N="?→N

If N≤ 3

Then

If N=2 Or N=3

Then

"N PREMIER"◢

Else

"N NON PREMIER"◢

IfEnd

Else

2→I

While (Intg(N÷I)≠N÷I) And (I≤ Intg(√(N)))

I+1I

WhileEnd

If Intg(N÷I)=N÷I

Then

"N NON PREMIER"◢

Else

"N PREMIER"◢

IfEnd

IfEnd

ClrText

b) En utilisant ce programme, on affiche :

* 19 et 53 sont premiers et 21 n'est pas premier.
* 2011 et 2017 sont premiers et 2013, 2015 et 2019 ne pas premiers.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| c) | TI83 | TI83 CE Premium | Casio Graph 35+ USB |
| TESTA : Durée du test de la primalité de 7 237 031 | 75 s | 58 s | 31 s |

1. a) Modification de l'algorithme pour tester la division par et pour ensuite ne pas tester la division par les autres nombres pairs :

Déclaration des variables : *N* et *I* sont des entiers

Début de l'algorithme

Saisir *N*

Si

Alors

Si

Alors

Afficher "*N* PREMIER"

Sinon

Afficher "*N* NON PREMIER"

Fin Si

Sinon

Si divise

Alors

Afficher " NON PREMIER"

Sinon

prend pour valeur

Tant que (*I* ne divise pas *N*) et (*I* E)

*I* prend la valeur *I* + 2

Fin Tant que

Si *I* divise *N*

Alors

Afficher "*N* NON PREMIER"

Sinon

Afficher "*N* PREMIER"

Fin Si

Fin Si

Fin de l'algorithme

* 1. Programmation sur calculatrice :

Programme TESTB sur TI

Prompt N

If N ≤ 3

Then

If N=2 ou N=3

Then

Disp "N PREMIER"

Else

Disp "N NON PREMIER"

End

Else

If partEnt(N/2)=N/2

Then

Disp "N NON PREMIER"

Else

3I

While (partEnt(N/I)≠N/I) et (I≤ partEnt(√(N)))

I+2I

End

If partEnt(N/I)=N/I

Then

Disp "N NON PREMIER"

Else

Disp "N PREMIER"

End

End

Programme TESTB sur Casio

"N="?→N

If N≤ 3

Then

If N=2 Or N=3

Then

"N PREMIER"◢

Else

"N NON PREMIER"◢

IfEnd

Else

If Intg(N÷2)=N÷2

Then

"N NON PREMIER"◢

Else

3→I

While (Intg(N÷I)≠N÷I) And (I≤ Intg(√(N)))

I+2I

WhileEnd

If Intg(N÷I)=N÷I

Then

"N NON PREMIER"◢

Else

"N PREMIER"◢

IfEnd

IfEnd

ClrText

* 1. L'amélioration du temps d'exécution du programme est très significative. La durée d'exécution du programme est divisée par 2. C'est une très nette amélioration pour de grandes valeurs de *N*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | TI83 | TI83 CE Premium | Casio Graph 35+ USB |
| TESTB : Durée du test de la primalité de 7 237 031 | 38 s | 29 s | 16 s |

**Exercice 4 *L'infinitude des nombres premiers***

1. En utilisant les programmes de test de primalité et de recherche de facteurs premiers de la calculatrice, on constate que sont premiers. Par contre sont composés et on obtient leur plus petit diviseur.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 3 | 7 | 31 | 211 | 2311 | 30031 | 510511 | 9699691 |
| est-il premier ? | oui | oui | oui | oui | oui | non | non | non |
| Plus petit diviseur premier de | 3 | 7 | 31 | 211 | 2311 | 59 | 19 | 347 |

1. Dans chacun des huit premiers termes, le plus petit diviseur premier de n'est pas l'un des nombres premiers utilisés pour construire le terme .
2. Démonstration par l'absurde.

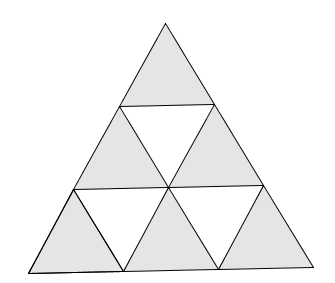
On suppose qu'il existe un plus grand nombre premier. On pose *p* le plus grand des nombres premiers.

On note .

* 1. On a donc donc .
  2. Par hypothèse, le plus grand des nombres premiers est *p* donc *N* n'est pas premier, donc *N* est composé.
  3. Par définition de *N*, on a . Donc ni 2, ni 3, …, ni *p* ne sont des diviseurs de *N*.
  4. On peut en déduire que *N* n'admet aucun diviseur premier. Donc *N* est premier. Or on a démontré précédemment que *N* était composé. Il y a donc contradiction !
  5. La conjecture émise est donc fausse. Il n'existe donc pas de " plus grand des nombres premiers".

Conclusion : Il existe une infinité de nombres premiers.

**Exercice 5 *Le triangle mystère***



3

8

7

4

1

**5**

9

6

2

432

**2160**

**105**

42

672

**270**

* L'ordre n'est qu'indicatif. Certaines étapes peuvent être permutées.
* On peut commencer le raisonnement en écrivant pour chacun des nombres la décomposition en produits de facteurs premiers.

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |
|  |

* 5 et 7 sont des facteurs premiers qui ne peuvent pas être multipliés avec d'autres pour former des nombres dans le triangle car on sait que ces nombres sont les neuf entiers de 1 à 9.

1. 5 : seuls **270**, **105** et **2160** sont divisibles par 5. Donc **5** est à l'intersection des rangées correspondantes.
2. 7 : seuls 42, 105 et 672 sont divisibles par 7. Donc 7 est à l'intersection des rangées correspondantes.
3. 105 est le produit de trois nombres. 5 et 7 ont déjà été placés. Donc la troisième case de sa rangée est occupée par 3.
4. Le 3 ne peut donc pas être présent dans la rangée du 42. Donc le produit qui donne 42 est nécessairement .
5. Le 6 est nécessairement dans la ligne qui forme le 270. Cette remarque permet de compléter la ligne du 270 par 9.
6. A ce stade, il reste 2, 4 et 8 à placer. La rangée du 432 qui a encore deux cases de libres nécessite que le produit de ces deux nombres soit égal à . Il ne peut pas s'agir que de .
7. Le 8 est donc en bas à droite du triangle. Il est alors facile de placer le 2 et le 4.

**Exercice 6 *Vrai - Faux***

1. Faux : Contre-exemple . La somme des 2 nombres premiers 2 et 3 est égale à 5 qui est aussi un nombre premier.
2. Faux : Contre-exemple 3 et 13 sont tous les deux premiers.
3. Vrai : Démonstration :

Utilisons un arbre afin de dénombrer les diviseurs positifs de :

……………………….

……………………….

. diviseurs positifs de

.

.

……………………….

……………………….

……………………….

. diviseurs positifs de

.

.

……………………….

.

.

.

.

.

……………………….

……………………….

. diviseurs positifs de

.

.

……………………….

Il y a donc bien diviseurs positifs de .

1. Faux : Contre-exemple le nombre admet 15 diviseurs dont seul 2 est premier.
2. Vrai : et donc quelle que soit la valeur de l'entier naturel non nul , le terme est composé. Donc toutes les suites , définie par avec un entier naturel non nul, comportent au moins un nombre composé : .
3. Vrai : L'algorithme proposé fournit nombres. Montrons que tous ces nombres sont composés.

* 1er nombre affiché : , il est donc divisible par 2, c'est donc un nombre composé.
* 2ème nombre affiché : , il est donc divisible par 3, c'est donc un nombre composé.
* Avant dernier nombre affiché :

, il est donc divisible par c'est donc un nombre composé.

* Dernier nombre affiché : , il est donc divisible par n, c'est donc un nombre composé.