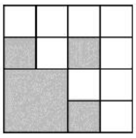
Olivier PINSON – groupe TraAM Maths et TICE de l'académie de Nantes – Mai 2012

« Une histoire d'aire »



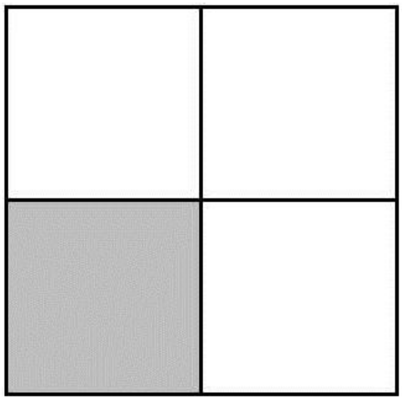
Compétences calculatoires travaillées ou en lien avec ce problème :
Suites géométriques, somme de termes, suites récurrentes, algorithmique

Descriptif rapide :
Dans ce problème, les élèves doivent déterminer la valeur du $15^{\text{ème}}$ terme d'une suite, obtenue par découpages successifs de l'aire d'une figure, puis déterminer l'expression explicite de la suite et sa limite.

Enoncé donné aux élèves :

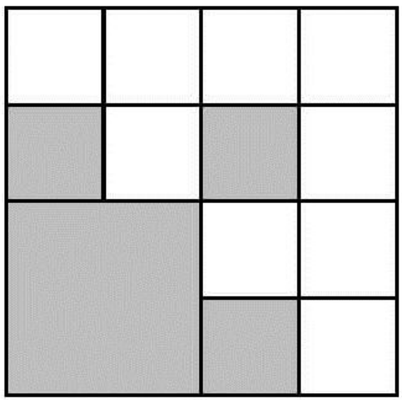
On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage :
On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas à gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage :

On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas à gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.

1. Calculer l'aire totale coloriée à l'étape 15.

2. Déterminer l'expression de l'aire totale coloriée à l'étape n en fonction de n.

3. Vers quelle limite tend l'aire totale coloriée quand n tend vers $+\infty$?

Consignes données aux élèves

Après un temps d'appropriation individuelle, des groupes de proximité de 3 ou 4 élèves se constituent. Les élèves ont à leur disposition des ordinateurs équipés des logiciels de mathématiques et reliés à internet.

Objectifs

Cette activité posée sous une forme ouverte (ou tâche complexe) vise prioritairement à renforcer la maîtrise des compétences de résolution de problème.
Elle permet de donner sens à la notion de suite et de justifier l'utilisation de la formule qui permet de calculer la somme des termes d'une suite géométrique.
L'automatisation de la mise en œuvre d'un algorithme pour calculer des termes d'une suite récurrente sera ensuite à travailler plus spécifiquement en fonction des besoins des élèves.

Textes de référence.

MATHÉMATIQUES | Le B.O. N°4 30 AOÛT 2001 HORS-SÉRIE | 67

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme.	On établira la limite en $+\infty$ de e^x/x et de $\ln x/x$; on en déduira la limite en $-\infty$ de xe^x ; on aboutira aux règles opératoires : *"à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x"* et *"les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x"*. On étudiera les fonctions $x \mapsto e^{-kx}$, ou $x \mapsto e^{-kx^2}$, avec $k>0$, et on illustrera leur décroissance rapide.	À travers des exemples, on étendra ces règles au cas des polynômes (comme pour la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2+1}$) Ces fonctions sont très utilisées en probabilité et en statistique, en théorie du signal etc.
Fonction racine n-ième	La racine n-ième sera introduite et expliquée ; on utilisera aussi la notation $x^{1/n}$.	On pourra aborder lors de l'étude de problèmes des fonctions du type $x \mapsto x^\alpha$ (avec α réel) ; l'étude générale de ces fonctions est hors programme.
Suites et récurrence		
Raisonnement par récurrence Suite monotone, majorée, minorée, bornée.	On choisira des exemples permettant d'introduire le vocabulaire usuel des suites et nécessitant l'utilisation de raisonnements par récurrence. On s'appuiera sur un traitement tant numérique (avec outils de calcul : calculatrice ou ordinateur) que graphique ou algébrique. On étudiera numériquement sur un ou deux exemples, la rapidité de convergence d'une suite (u_n) vers sa limite L, en complétant l'étude sur tableur par des encadrements de (u_n-L) On traitera quelques problèmes menant à l'étude de suites définies par $u_{n+1}=au_n+b$.	On présentera le principe de récurrence comme un axiome. Aucune notion théorique de rapidité de convergence n'est au programme.

Analyse des compétences calculatoires travaillées

L'objectif est de renforcer la capacité des élèves à modéliser une situation concrète par une suite dont l'expression n'est pas immédiate, de « casser » l'idée que les suites sont soit arithmétiques, soit géométriques, de montrer qu'une suite peut être générée par des expressions différentes. Enfin différentes stratégies peuvent être utilisées pour calculer les termes successifs d'une suite récurrente (à la main, avec la calculatrice, avec le tableur, avec un algorithme). La notion de limite est abordée, ainsi que son interprétation dans le contexte du problème.

Scénario

Testé en classe de Terminale scientifique : 34 élèves.
En salle de cours – des postes informatiques disponibles dans une salle annexe.

Ce qui a été fait avant

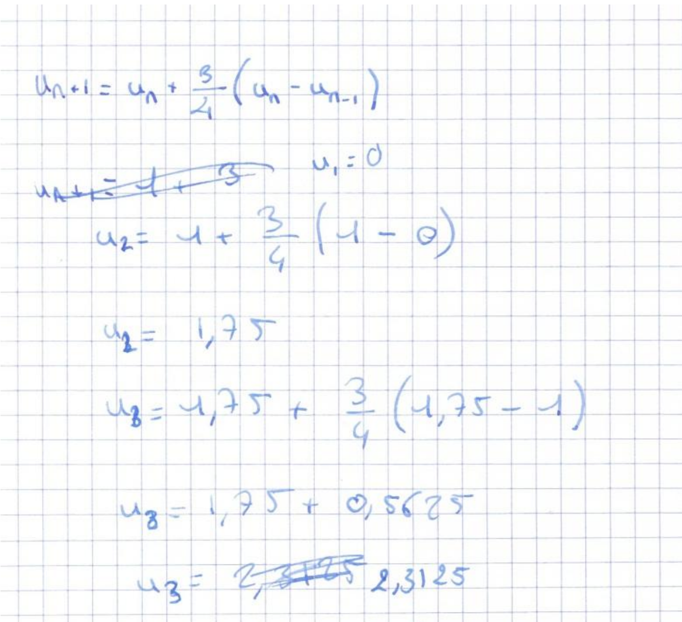
Les élèves ont vu précédemment en classe de première les suites arithmétiques et géométriques. En Terminale, les élèves ont déjà étudié des suites récurrentes, découvert le raisonnement par récurrence.
La calculatrice et le logiciel « xcas » ont été utilisés pour calculer les termes successifs d'une suite récurrente. Les élèves ont déjà été mis en situation de conjecturer l'expression explicite d'une suite et à démontrer leur conjecture.

Séance 1 (30 mn)

La séance se déroule dans une salle de classe à 34 élèves, avec la possibilité d'utiliser des ordinateurs portables. Après un temps d'appropriation individuelle, 9 groupes de proximité de 3 ou 4 élèves se constituent.
L'énoncé n'a pas posé de problème de compréhension.
A la fin de cette première séance, aucune mise en commun n'est effectuée, les brouillons des différents groupes sont ramassés.

Quelques extraits :

EXTRAIT N°1


$u_{n+1} = u_n + \frac{3}{4}(u_n - u_{n-1})$

$\cancel{u_{n+1} = 1 + 3}$ $u_1 = 0$

$u_2 = 1 + \frac{3}{4}(1 - 0)$

$u_2 = 1,75$

$u_3 = 1,75 + \frac{3}{4}(1,75 - 1)$

$u_3 = 1,75 + 0,5625$

$u_3 = 2,3125$

EXTRAIT N°2

1) $u_1 = 1$

$u_2 = 1 + \frac{3}{4}(1)$

$= 1{,}75 = \frac{7}{4}$

$u_3 = \underbrace{\frac{7}{4}}_{u_{n-1}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{7}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{7}{4} = \frac{37}{16}$

$u_4 = u_{n-1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$= \frac{37}{16} + \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$= \frac{175}{64}$

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

EXTRAIT N°3

2) u_n = nombre de carrés rajoutés à chaque étape n

$u_1 = 1$ $\times 3$
$u_2 = 3$ $\times 3$
$u_3 = 9$ $\times 3$
$u_4 = 27$

$u_n = 1\,3^{n-1}$

v_n = aire des carrés rajoutés à — n

$v_1 = 1$ $\times \frac{1}{4}$
$v_2 = \frac{1}{4}$
$v_3 = \frac{1}{16}$
$v_4 = \frac{1}{64}$

$v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$a_1 = u_1 \times v_1 = 1$
$a_2 = u_2 \times v_2 = \frac{3}{4}$
$a_3 = \frac{9}{16}$
$a_4 = \frac{27}{64}$

EXTRAIT N°4

$U_2 = 1,75 = \frac{7}{4} = U_{n-1} + 3 \times 0,5^2 =$

$U_3 = U_{n-1} + 9 \times 0,25^2 = 2,3125 = \frac{37}{16}$

$U_4 = U_{n-1} + 27 \times 0,125^2 = \frac{175}{64}$

$U_5 = \frac{780}{256} = \left(\frac{0,125}{2}\right)^2 \times 3 \times 27 + \frac{175}{64}$

$\frac{7}{4} \ ; \ \frac{37}{16} \ ; \ \frac{175}{64} \ ; \ \frac{780}{256}$

$U_{n-1} + x \times y^2$

$x_1 = 1$ $y_1 = 1$

$x_2 = 3$ $)\times n$ $y_2 = 0,5$

$x_3 = 9$ $y_3 = 0,25$

$x_4 = 27$ $y_4 = 0,125$

$x_5 = 81$ $y_5 = 0,0625$

$\cancel{x_n = (n-1) \times 3}$ $\cancel{y_n = (n-1) \times \frac{1}{2}}$

$x_n = 1 \times 3^{(n-1)}$

$y_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

EXTRAIT N°5

On calcule le nombre de carré nouvellement colorié à chaque étape en créant une suite c_n tel que

$c_{n+1} = c_n \times 3$ C'est une suite géométrique de raison 3 et de 1^er terme 1.

et $c_{n+1} = 3^n$

On calcule ensuite la longueur des cotés à l'étape n.

$l_{n+1} = \frac{l_{n-1}}{2}$ Suite géométique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^er terme 1.

et $l_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc l'aire colorié à chaque étape est

$A_{n+1} = A_n + 3^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

EXTRAIT N°6

$A_n =$ Atotale − nombre de carré non colorié × longueur du côté du carré

$A_1 = 4 - 3 \times 1 = 1$ $\quad A_1 = 4 - 3^1 \times \frac{1}{4^0}$

$A_2 = 4 - 9 \times \frac{1}{4}$

$= 4 - 3^2 \times \frac{1}{4^1}$

$A_3 = 4 - 27 \times \frac{1}{16}$

$= 4 - 3^3 \times \frac{1}{4^2}$

En observant ces brouillons on peut distinguer essentiellement 4 stratégies :

- la modélisation par une suite récurrente sur 2 termes successifs (extrait n°1) :

  $$u_{n+1} = u_n + \frac{3}{4}(u_n - u_{n-1})$$

- la modélisation par une récurrente (extrait n°2) :

  $$u_{n+1} = u_n + (\frac{3}{4})^n$$

- la modélisation à l'aide de 2 suites (extraits n°3, n°4, n°5) :
  celle du nombre de carrés coloriés à l'étape n
  celle de l'aire d'un carré colorié à l'étape n

- la modélisation de l'aire non coloriée par une suite (extrait n°6).

Séance 2 (55 mn)

La séance permet à tous les groupes d'aboutir au calcul de la valeur de l'aire coloriée à l'étape 15. La totalité de la séance est nécessaire pour permettre certains groupes de finir. D'autres terminent avant la fin.

Le groupe qui avait commencé avec la stratégie de l'extrait n°1, aboutit, à la main, au calcul du 15[ème] terme :

$u_8 \simeq 3{,}47 + \frac{3}{4}(3{,}47 - 3{,}29)$

$u_8 \simeq 3{,}605$

$u_9 \simeq 3{,}605 + \frac{3}{4}(3{,}605 - 3{,}47)$

$u_9 \simeq 3{,}706$

$u_{10} \simeq 3{,}706 + \frac{3}{4}(3{,}706 - 3{,}605)$

$u_{10} \simeq 3{,}782$

$u_{11} \simeq 3{,}782 + \frac{3}{4}(3{,}782 - 3{,}706)$

$u_{11} \simeq 3{,}839$

$u_{12} \simeq 3{,}839 + \frac{3}{4}(3{,}839 - 3{,}782)$

$u_{12} \simeq 3{,}88$

$u_{13} \simeq 3{,}88 + \frac{3}{4}(3{,}88 - 3{,}839)$

$u_{13} \simeq 3{,}91$

$u_{14} \simeq 3{,}91 + \frac{3}{4}(3{,}91 - 3{,}88)$

$u_{14} = 3{,}93$

$u_{15} = 3{,}93 + \frac{3}{4}(3{,}93 - 3{,}91)$

$u_{15} = 3{,}94$

Plusieurs groupes qui avaient démarré leur recherche avec la stratégie n°2 (extrait n°2) continuent

- soit en utilisant leur calculatrice :

calculette

$U(n) = U(n-1) + 3\wedge(n-1) \times (1/2)\wedge(2n-2)$

$A_{15} \simeq 3{,}9465$

- soit en écrivant un programme sur « xcas » :

```
? Sauver                                                    Config carré c
1 Prog  Edit  Ajouter                          9                 nxt
carré_colorié():={
saisir("nombre de termes ?",N);
n:=1;
A:=1;
afficher(A);
tantque n<N faire
n:=n+1;
A:=A+(3/4)^(n-1);
afficher(approx(A));
ftantque;
}:;
// Parsing carré_colorié
// Warning: N,n,A, declared as global variable(s) compiling carré_colorié
2 carré_colorié()
A:1
1.75
2.3125
2.734375
3.05078125
3.2880859375
3.46606445312
3.59954833984
3.69966125488
3.77474594116
3.83105945587
3.8732945919
3.90497094393
3.92872820795
3.94654615596
Evaluation time: 1.872
3 1
```

Les groupes qui ont démarré avec la stratégie des extraits n°3, n°4 et n°5 terminent par le calcul :

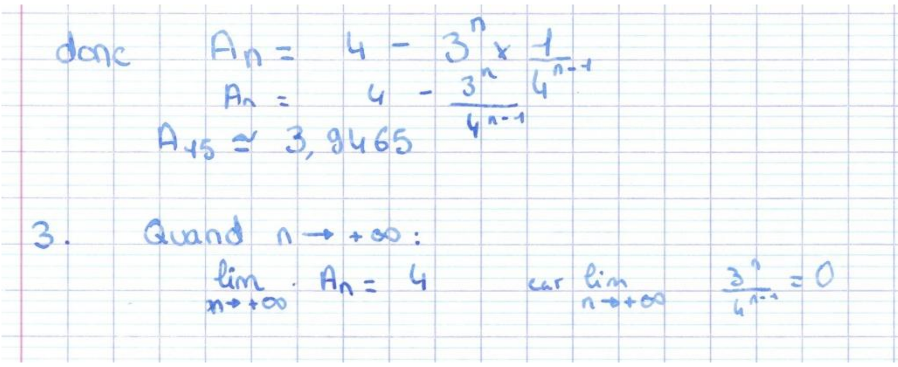
$a_n = u_n \times v_n = 3^{n-1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

A_n = l'aire totale des carrés coloriés.

$A_n = A_1 \times \frac{1 - \text{raison}^{n}}{1 - \text{raison}}$ $\quad A_1 = a_1 = 1.$

$= \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}} = \left(4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$ pas sûr

Enfin l'unique groupe qui a commencé avec la stratégie de l'extrait n°6 termine son raisonnement par le calcul :


donc $A_n = 4 - 3^n \times \frac{1}{4^{n-1}}$

$A_n = 4 - \frac{3^n}{4^{n-1}}$

$A_{15} \simeq 3,9465$

3. Quand $n \to +\infty$:

$\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = 4$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{3^n}{4^{n-1}} = 0$

Séance 3 (55 mn)

En classe entière, les différents groupes viennent à tour de rôle présenter au tableau le contenu de leur recherche.
L'accent est mis sur la variété des stratégies finalement « gagnantes » pour calculer la valeur de l'aire coloriée à l'étape 15.
Par contre, le constat est fait que seuls quelques groupes ont répondu aux questions 2 et 3, notamment en obtenant une expression explicite de la suite modélisant l'aire totale coloriée à l'étape n.
Un point est fait sur le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique puis l'expression obtenue $\frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}}$ est comparée avec celle obtenue par le dernier groupe (dernier extrait).