Vecteurs en seconde : deux approches expérimentées en classe Novembre 2011

Les vecteurs sont restés présents dans les nouveaux programmes de seconde publiés en 2009 mais le texte officiel laisse une certaine liberté concernant l'introduction de cette nouvelle notion. On sait maintenant que la notion d'espace vectoriel est présente dans les programmes de 1S et de TS ce qui permet de dégager de nouvelles approches.
Les deux approches présentées ci-dessous s'adressent aux professeurs : le but est que le professeur puisse voir comment les démonstrations se construisent à partir des savoirs des élèves. Ensuite le professeur a la liberté de faire des choix pédagogiques en démontrant certaines parties et en admettant d'autres. Autrement dit, il n'est pas question de tout démontrer mais il est intéressant d'avoir un déroulement rigoureux de l'ensemble du chapitre.

Progression privilégiant l'aspect espace vectoriel (expérimentée par Philippe Jonin en 2010/2011)

Cette progression, complètement en accord avec le programme, privilégie la vision « espace vectoriel » Sur les trois années du lycée, le programme installe bien la notion d'espace vectoriel. Par exemple en 1S, on parle de droite définie par un point et un vecteur non nul et on demande de savoir exprimer un vecteur du plan en fonction de deux vecteurs non colinéaires. De même en TS on parle de plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaire et on demande de savoir exprimer un vecteur l'espace en fonction de trois vecteurs non coplanaires.
Avec cette progression, on commence par introduire l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$*. Au départ, un vecteur est un couple de réels .La translation, la somme de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre sont définies à partir des opérations sur les couples de* $\mathbb{R}^2$*. Ensuite, on fait le lien entre vecteur et géométrie repérée. On obtient, à postériori, l'indépendance des définitions par rapport au repère choisi.*
Avec cette progression, le gain de temps est très net et la notion d'espace vectoriel est bien installée.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;I,J)$.
A chaque point M du plan, on associe donc le couple de ses coordonnées (x,y).

1. Vecteur du plan.

Un vecteur du plan repéré est, par définition, un couple (a,b) de nombres réels.
On note un vecteur par une lettre surmontée d'une flèche : $\vec{u}$.
Les nombres réels a et b sont appelés les composantes ou coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

Remarques :
1. Un plan repéré étant donné, un couple de nombres réels peut donc être interprété soit comme le couple des coordonnées d'un point du plan, soit comme un vecteur.
2. On définit en particulier le vecteur nul comme $\vec{0}=(0,0)$

2. Translaté d'un point.

Soit un vecteur $\vec{u}=(a,b)$ du plan repéré.
A tout point $A(x_A,y_A)$ du plan, on associe un point A', appelé translaté par $\vec{u}$ de A, défini par ses coordonnées : $A'(x_A+a,y_A+b)$

3. Lien avec la géométrie.

Soit $\vec{u}=(a,b)$ un vecteur du plan repéré. Soit A un point du plan et A' son translaté par $\vec{u}$.
Soit B un point du plan.
Le translaté de B par le vecteur $\vec{u}$ est le point B' tel que $AA'B'B$ soit un parallélogramme.

Démonstration :
Le point A' a pour coordonnées : $(x_A+a\ ;\ y_A+b)$ et B' a pour coordonnées $(x_B+a\ ;y_B+b)$.

Le milieu de $[AB']$ a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A+x_B+a}{2};\dfrac{y_A+y_B+a}{2}\right)$

Le milieu de [$A'B$] a pour coordonnées : $\left(\dfrac{x_A+a+x_B}{2};\dfrac{y_A+a+y_B}{2}\right)$

Le milieu de [AB'] est égal au milieu de [$A'B$] donc $AA'B'B$ est un parallélogramme.

Remarque : dans l'autre sens, soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux point du plan.

Existe-t-il un vecteur $\vec{u}$ tel que B soit le translaté de A par $\vec{u}$? Le vecteur $\vec{u}(x_B-x_A; y_B-y_A)$ convient et c'est le seul. On remarque que les coordonnées de ce vecteur sont obtenues en soustrayant des coordonnées de l'extrémité, les coordonnées de l'origine.

Conclusion :

Soit un vecteur $\vec{u}=(a,b)$ du plan repéré.

A tout point $M(x_M, y_M)$ du plan, on associe un point M', appelé translaté par $\vec{u}$ de M, défini par ses coordonnées : $M'(x_M+a, y_M+b)$. On peut ainsi fabriquer une famille de bipoints (M, M') qui sont tous reliés entre eux par un parallélogramme. Plus précisément : si (M, M') et (N, N') sont deux bipoints quelconques de cette famille alors $MM'N'N$ est un parallélogramme.

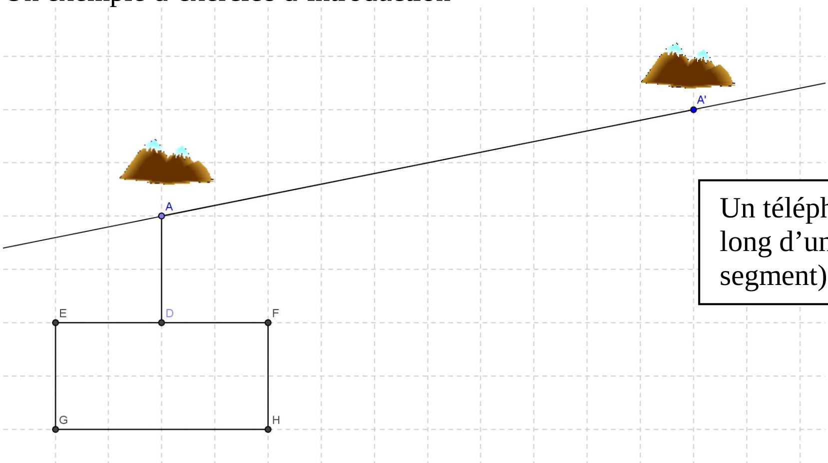
De plus, pour tous les bipoints de cette famille, les écarts des coordonnées sont constants. Plus précisément : si (M, M') et (N, N') sont deux bipoints quelconques de cette famille alors $x_{M'}-x_M=a$ et $y_{M'}-y_M=b$.

Etant donnés deux points A et B du plan repéré, il existe un unique vecteur $\vec{u}$ tel que B soit le translaté de A par $\vec{u}$. Ce vecteur $\vec{u}$ se note aussi $\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A; y_B-y_A)$ et que **: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ équivaut à ABDC est un parallélogramme.**

En pratique la conclusion ne sera pas transmise aux élèves sous cette forme : l'essentiel est que l'élève comprenne qu'un vecteur est un couple de coordonnées et que ce couple correspond à un ensemble de flèches. On peut commencer le chapitre en observant une situation concrète qui montre des flèches ayant en commun un même couple de coordonnées. Le vecteur apparaît et le lien avec le parallélogramme peut se faire.

Un exemple d'exercice d'introduction

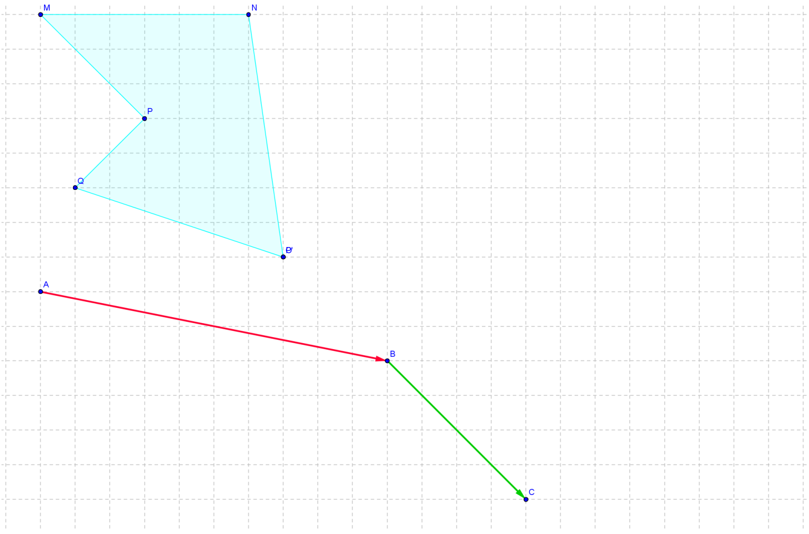


Un téléphérique se déplace le long d'un câble (assimilé ici à un segment) de A vers A'.

1) Dessiner, sur le même graphique, le téléphérique, lorsqu'il sera arrivé en A'.
2) On appelle E', D', F', G' et H' la représentation du téléphérique à l'arrivée du terminus.
   a) Tracer, <u>d'une même couleur</u>, les segments [EE'], [FF'], [GG'] et [HH'].
   b) Que peut-on remarquer (sans démonstration) ?
3) On considère un repère orthonormal (O;I, J) formant un triangle rectangle isocèle de sommet O.
   a. Déterminer, dans ce repère, les coordonnées des points A, E, D, F, H et G (lorsque le téléphérique est au point de départ).
   b. Déterminer, dans ce même repère les coordonnées des points A', E', D', F', H' et G' (A l'arrivée…)
   c. Soit M un point du téléphérique au départ dont les coordonnées sont (x,y). Quelles seront les coordonnées du point M' (à l'arrivée) ?
4) Déterminer la nature du quadrilatère AA'E'E (avec une démonstration cette fois !).

4. Addition de deux vecteurs.

A partir de l'enchaînement de deux translations, par exemple en utilisant la figure suivante, on dégage les idées qui suivent :



Si $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$, la somme des deux vecteurs est définie par : $\vec{u} + \vec{v} = (a+c\ ;\ b+d)$

Propriétés :

▫ Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on obtient facilement les égalités:
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ et $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.

▫ Quels que soit le vecteur $\vec{u}$, le vecteur opposé du vecteur $\vec{u}\,(a,b)$ est le vecteur $\vec{v}(-a,-b)$.
C'est l'unique vecteur tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.On le note $-\vec{u}$.

▫ Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut définir la soustraction de deux vecteurs en posant :
$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$

Interprétation géométrique

▪ Règle du parallélogramme

Soit $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$. Considérons un point A quelconque du plan .

Construisons le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, le point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$.

On a : $B(x_A + a, y_A + b)$ $C(x_A + c, y_A + d)$ $D(x_A + a + c, y_A + b + d)$

Le milieu de $[AD]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_A + a + c}{2}, \dfrac{y_A + y_A + c + d}{2}\right) = \left(x_A + \dfrac{a+c}{2}, y_A + \dfrac{c+d}{2}\right)$

Le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + a + x_A + c}{2}, \dfrac{y_A + b + y_A + d}{2}\right) = \left(x_A + \dfrac{a+c}{2}, y_A + \dfrac{c+d}{2}\right)$

Les diagonales du quadrilatère $ABDC$ ont le même milieu donc ce quadrilatère est un parallélogramme.
Le point D est donc l'unique point tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Conclusion :

Le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est l'unique point tel que ABDC soit un parallélogramme.

Remarque : ce résultat assure, à postériori, l'indépendance de la définition de la somme de deux vecteurs par rapport au repère.

▪ En enchaînant deux translations.

Soit $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$ alors : $\vec{u} + \vec{v} = (a+c\ ;\ b+d)$.

Considérons un point M quelconque du plan.

Construisons le point *N* tel que $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$, le point *P* tel que $\overrightarrow{NP} = \vec{v}$.
Calculons les coordonnées de *P*.
Comme $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ alors $x_N - x_M = a$ et comme $\overrightarrow{NP} = \vec{v}$ alors $x_P - x_N = c$ donc $x_P = x_N + c = x_M + a + c$ **.**
De la même façon, on obtient $y_P = y_N + d = y_M + b + d$. Ce qui prouve que $\overrightarrow{MP} = \vec{u} + \vec{v}$.
Autrement dit : si la translation de vecteur $\vec{u}$ transforme le point *M* en *N* et si la translation de vecteur $\vec{v}$ transforme le point *N* en *P* alors le point *P* est l'image du point *M* par la translation de vecteur : $\vec{u} + \vec{v}$.

Conclusion :
Quels que soient les points *M* , *N* , *P* : $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (Relation de Chasles)

▪ En pratique pour additionner deux vecteurs.
Deux vecteurs « de même origine » : règle du parallélogramme
Deux vecteurs « bout à bout » : relation de Chasles
Cas général : on se ramène à l'un des cas précédents !

5. Multiplication d'un vecteur par un réel

Remarques :
▫ $\vec{u} + \vec{u} = (a,b) + (a,b) = (2a, 2b) = 2\vec{u}$
▫ $n\vec{u} = (na, nb)$ où *n* est un entier naturel.
▫ $-\vec{u} = (-a, -b) = (-1)(a,b) = (-1)\vec{u}$

En généralisant :
Si $\vec{u} = (a,b)$ et si *k* est un réel quelconque, le produit du vecteur par le réel *k* est définie par : $k\vec{u} = (ka, kb)$

Propriétés :
Quels que soient les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les réels *k* et *k'*, on a les égalités :
$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ et $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ et aussi $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

6. Vecteurs colinéaires

Définition : **quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls,**
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que l'un des vecteurs est égal au produit de l'autre vecteur par un réel.
On complète cette définition en convenant que le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur.
On obtient alors :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont leurs coordonnées proportionnelles.

Propriété : montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls ssi les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles .
Dans un repère (*O* ; *I* ; *J*), construisons le point *M* tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et le point *N* le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$.

▫ Supposons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls, alors il existe un nombre réel *k* non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
On a donc $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM}$ donc $x_N = k\,x_M$ et $y_N = k\,y_M$ ce qui prouve que les points *O*, *M*, *N* sont alignés donc aussi que (*AB*) et (*CD*) sont parallèles (puisque (*AB*)//(*OM*) et (*CD*)//(*ON*)).

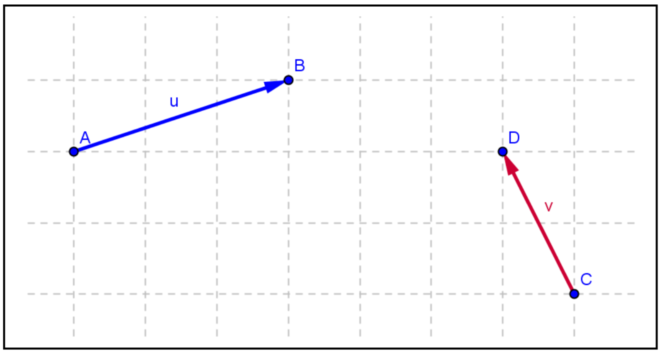
▫ Réciproquement :
Supposons que les droites (*AB*) et (*CD*) sont parallèles « non verticales » alors les points *O*, *M* et *N* sont alignés sur une droite d'équation $y = a\,x$ donc que les coordonnées de *M* et *N* sont proportionnelles donc que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont proportionnelles, celles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont aussi proportionnelles donc qu'il existe un réel *k* non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
De même quand les droites (AB) et (CD) sont parallèles « verticales » ou que O, M et N sont alignés sur une droite d'équation $x = a$.

Conclusion : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires non nuls **ssi** les droites (AB) et (CD) sont parallèles .

Progression intermédiaire (expérimentée par Gérard Cordes en 2010/2011)

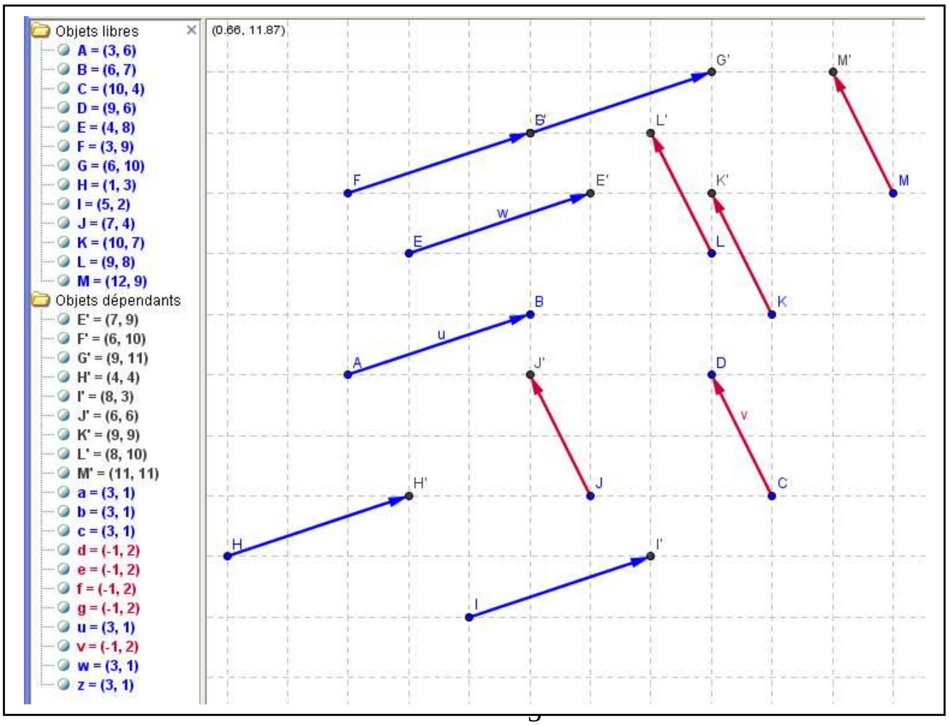
Cette progression débute avec la notion de flèches ayant même direction, même sens et même longueur mais utilise très vite les coordonnées : les coordonnées apparaissent dès les premières définitions et sont utilisées pour définir la somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un nombre. La notion d'espace vectoriel est vite installée en s'appuyant sur $\mathbb{R}^2$*. Le gain de temps est appréciable pour la classe de seconde où le programme est lourd.*
On suppose connues les coordonnées d'un point et on utilisera le fait que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Les élèves semblent avoir bien aimé cette façon de procéder mais en général ils apprécient le chapitre Vecteurs qui ouvre sur une certaine abstraction souvent appréciée à cet âge. En particulier, les animations sous géogébra ont donné le sentiment d'approcher de très prés la notion de vecteur et de bien comprendre, en même temps, que le vecteurs est un objet abstrait qu'il faut s'approprier.

▪ Premier temps : découverte avec géogébra.
▫ Avec le logiciel de géométrie dynamique géogébra (avec affichage de la grille) les élèves découvrent l'instruction « vecteur » (avec la syntaxe point origine puis point extrémité) : l'affichage est une flèche. Sur la fenêtre algébrique, un couple de deux nombres est affiché. Plusieurs essais permettent d'avancer une interprétation : quand on va de l'origine de la flèche vers l'extrémité, ces deux nombres codent le déplacement suivant l'axe des abscisses puis suivant l'axe des ordonnées.



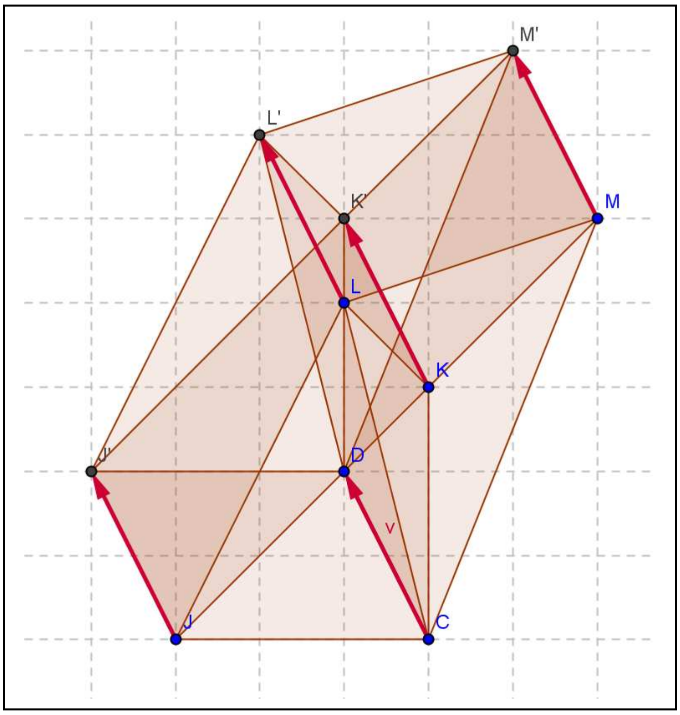
▫ Toujours avec le logiciel géogébra, on explore l'instruction « représentant » (avec la syntaxe : point-origine puis vecteur déjà crée). L'élève crée plusieurs représentants d'un même vecteur et découvre que ces représentants sont tous liés : si on bouge A et/ou B les représentants bougent de la même façon : les élèves remarquent que deux représentants quelconques sont liés par un parallélogramme et que les couples de nombres affichés dans la fenêtre d'algèbre sont les mêmes.
▫ On peut énoncer deux conjectures :

Deux représentants d'un même vecteur sont codés par les mêmes nombres.
Deux représentants d'un même vecteur sont liés par un parallélogramme.



▪ Deuxième temps : vers les définitions.
Le plan est muni d'un repère (O,I,J).
On peut dégager la notion de flèche (couple de deux points avec point-origine et point-extrémité) ainsi que ses coordonnées (couple de deux nombres qui codent le déplacement suivant l'axe des abscisses puis suivant l'axe des ordonnées). Ainsi la flèche allant de A vers B a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
Dire que « La flèche allant de A vers B et la flèche allant de C vers D ont des coordonnées égales » revient à dire que « ABDC est un parallélogramme ».

Preuve : $(x_B - x_A ; y_B - y_A) = (x_D - x_C ; y_D - y_C)$ donc : $x_B - x_A = x_D - x_C$ et $y_B - y_A = y_D - y_C$ donc $x_B + x_C = x_D + x_A$ et $y_B + y_C = y_D + y_A$ donc $\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{x_D + x_A}{2}$ et $\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{y_D + y_A}{2}$ donc les segments [BC] et [AD] ont même milieu et ABDC est un parallélogramme.



▪ Le plan est muni d'un repère (O,I,J).

On appelle « vecteur AB » et on note $\overrightarrow{AB}$ l'ensemble de toutes les flèches ayant les mêmes coordonnées que la flèche allant de A vers B.
Chaque flèche appartenant au vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'appelle un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont les coordonnées d'un représentant quelconque du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On écrira : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.
Deux représentants quelconques du vecteur $\overrightarrow{AB}$ forment un parallélogramme.
D'où : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme .
Ensuite on prouve l'équivalence : I est le milieu du segment $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

Ainsi on a vérifié à posteriori que la définition d'un vecteur est indépendante du repère choisi.

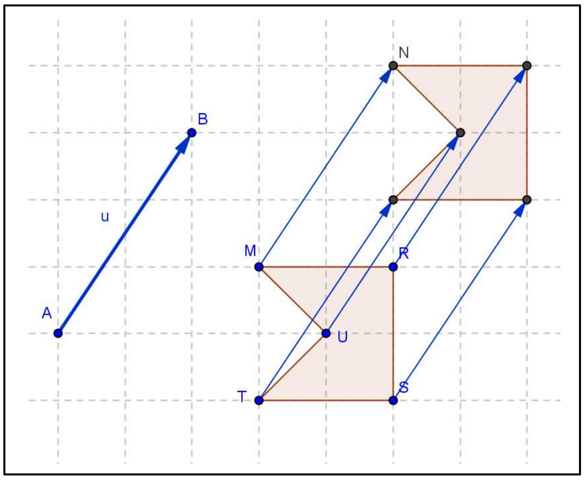
▪ Translation de vecteur $\vec{u}$

On appelle translation de vecteur $\vec{u}(a;b)$ la transformation qui à tout point M associe le point N défini par $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$. Le point N est appelé le translaté de M par la translation de vecteur $\vec{u}$.
Les coordonnées de N sont: $x_N = x_M + a$ et $y_N = y_M + b$.

Preuve : On sait que : $\overrightarrow{MN}(x_N - x_M ; y_N - y_M)$ donc $x_N - x_M = a$ et $y_N - y_M = b$ d'où :
$x_N = x_M + a$ et $y_N = y_M + b$

Dire que « N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ » revient à dire que « $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ » ou que « ABNM est un parallélogramme ».

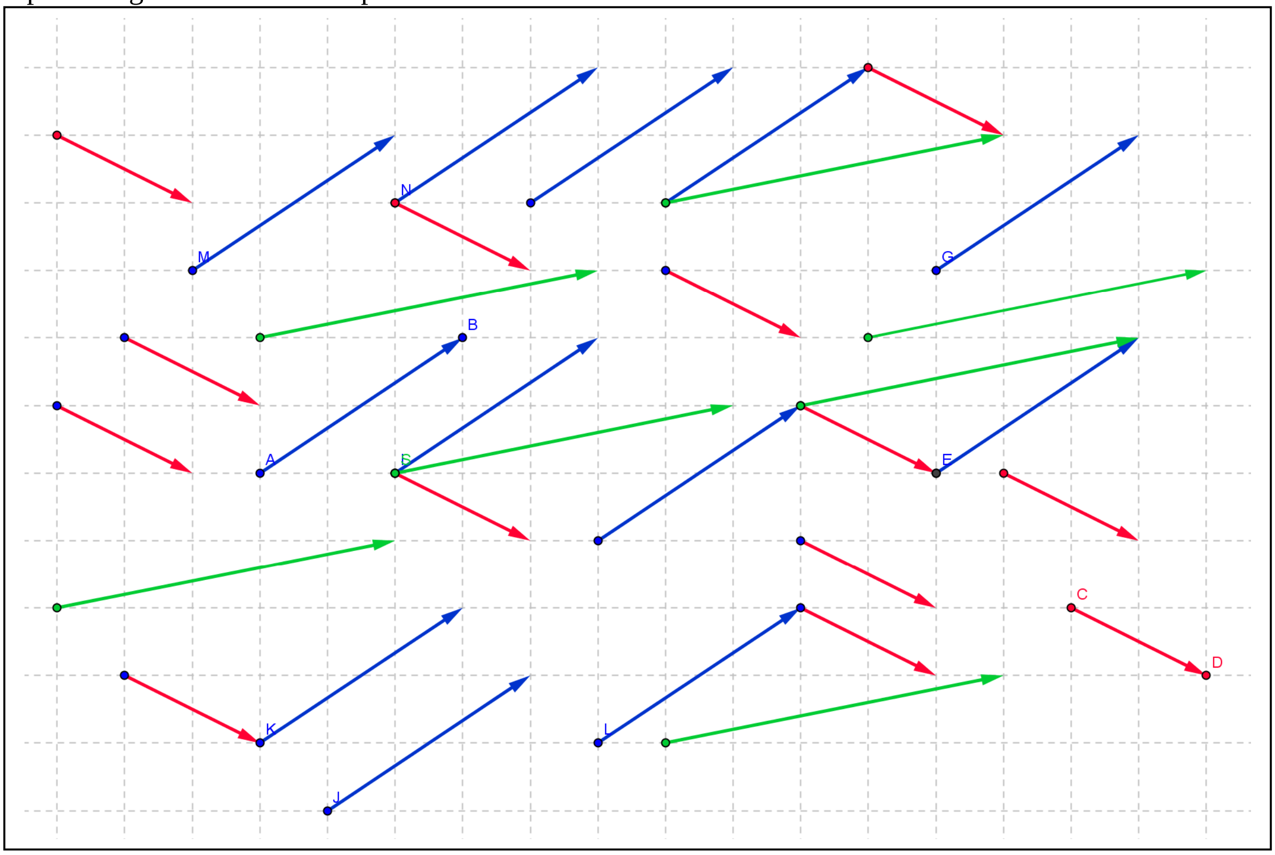
Illustration avec géogébra avec l'instruction translation :



▪ Somme de deux vecteurs

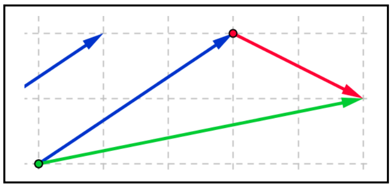
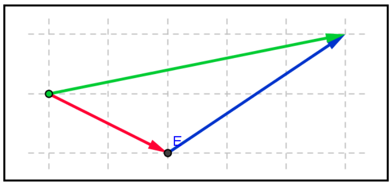
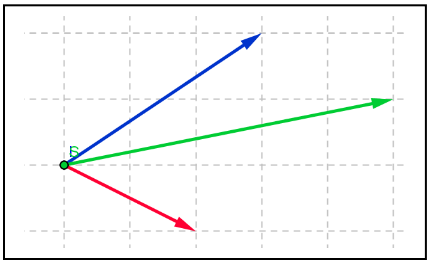
On se place dans un repère (O,I,J). On considère le vecteur $\vec{u}(a;b)$ et le vecteur $\vec{v}(a';b')$.
Par définition, le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est défini par ses coordonnées $(a+a';b+b')$.

Animation géogébra :
On peut visualiser plusieurs représentants de $\vec{u}$ en bleu et de $\vec{v}$ en rouge.
Avec l'instruction $\vec{w} = (a+a';b+b')$, on visualise plusieurs représentants de $\vec{u}+\vec{v}$ en vert.
On peut bouger ces différents représentants.



On peut faire observer aux élèves deux cas de figure intéressants qui vont permettre d'énoncer deux conjectures concernant la construction d'un représentant de $\vec{u}+\vec{v}$:

- cas où un représentant de $\vec{u}$ et un représentant de $\vec{v}$ sont placés bout à bout.
- cas où un représentant de $\vec{u}$ et un représentant de $\vec{v}$ ont la même origine.

Règle du parallélogramme.
Soit A un point quelconque du plan, on construit le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ et le point N le point tel que $\overrightarrow{AN}=\vec{v}$.
Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AS}$ où S est construit de telle façon que AMSN est un parallélogramme.

Preuve : en posant $A(x_A;y_A)$, $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ on obtient $M(x_A+a;y_A+b)$.
Comme AMSN est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{AN}$ donc $\overrightarrow{MS}=\vec{v}$ d'où $S(x_M+a',y_M+b')$ donc $S(x_A+a+a',y_A+b+b')$ ce qui donne : $\overrightarrow{AS}(a+a',b+b')$ donc $\overrightarrow{AS}=\vec{u}+\vec{v}$
Cette construction assure que la définition de la somme est indépendante du repère choisi.

Règle des représentants « bout à bout »
Soit A un point quelconque du plan, on construit le point M tel que $\overrightarrow{AM}=\vec{u}$ et le point N le point tel que $\overrightarrow{MN}=\vec{v}$.
Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{AN}$

Preuve : en posant $A(x_A;y_A)$, $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$ on obtient $M(x_A+a;y_A+b)$.
$N(x_M+a',y_M+b')$ donc $N(x_A+a+a',y_A+b+b')$ ce qui donne : $\overrightarrow{AN}(a+a',b+b')$ donc $\overrightarrow{AN}=\vec{u}+\vec{v}$.

Conséquence :

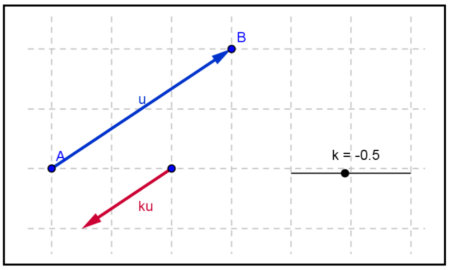
Relation de Chasles :
Quels que soient les points A , B et C, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

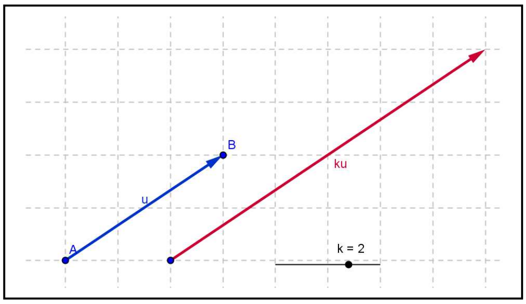
A suivre : les propriétés de l'addition, la notion d'opposé et la différence de deux vecteurs.

▪ **Multiplication d'un vecteur par un nombre réel**
L'addition « à répétition » permet de définir la multiplication d'un vecteur par un nombre entier naturel puis de généraliser avec la multiplication d'un vecteur par un entier négatif puis par un réel en posant :

Quel que soit le vecteur $\vec{u}(x;y)$ et le réel k, le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées : $k\vec{u}(kx;ky)$.

Animation géogébra : en utilisant un curseur k et l'instruction v=(k*x(u),k*y(u))





Quels que soient les points A et B distincts et les points C et D distincts.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles ssi il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

Preuve :
On se place dans un repère (O ; I ; J). On construit le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et le point N le point tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{CD}$.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles « non verticales » revient à dire que O, M et N sont alignés sur une droite d'équation $y = ax$ donc que les coordonnées de M et N sont proportionnelles donc que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles donc qu'il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
De même quand les droites (AB) et (CD) sont parallèles « verticales » ou que O, M et N sont alignés sur une droite d'équation $x = a$.

▪ Vecteurs colinéaires

On dit que deux vecteurs sont **colinéaires** pour dire que ces deux vecteurs ont **même direction** en convenant que le vecteur nul a même direction que n'importe quel vecteur.

Avec la propriété précédente, on obtient :
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel *k*, le vecteur $k\vec{u}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$.
Tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$ s'écrit sous la forme $k\vec{u}$ avec *k* réel.

Conséquences :

▪ A et B étant deux points distincts ,
$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

▪ A et B étant deux points distincts, C et D étant deux points distincts
$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

▪ Critère de colinéarité de deux vecteurs
Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$.

$*$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie les coordonnées de $\vec{u}$ et celles de $\vec{v}$ sont proportionnelles

$*$ $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires signifie que $\begin{array}{|c|c|}\hline x & x' \\ \hline y & y' \\ \hline\end{array}$ est un tableau de proportionnalité

$*$En utilisant les « produits en croix on obtient le critère suivant très utilisé :

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires signifie que $x\,y' = y\,x'$